

系級：\_\_\_\_\_ 學號：\_\_\_\_\_ 姓名：\_\_\_\_\_

1. 考慮下述三條微分方程式

(a)  $y''(t) - 3y'(t) - 3y(t) = 0$    (b)  $y''(t) + 4y(t) = 0$    (c)  $y''(t) + 8y'(t) + 15y(t) = 0$

試問：

- (1) 當  $t \rightarrow \infty$ ，何者會產生週期性振動的解？ (4%)
- (2) 當  $t \rightarrow \infty$ ，何者的解會衰減到零？ (4%)
- (3) 當  $t \rightarrow \infty$ ，何者會產生無窮大的解？ (4%)

2. 已知線性微分方程  $x^2 y''(x) + axy'(x) + by(x) = x \ln x$  有兩個補解  $x$  與  $x \ln x$

- (1) 試求常數  $a$  與  $b$  為何？ (8%)
- (2) 試求此微分方程之通解。 (7%)

3. 試求下述微分方程之通解

- (1)  $y^{(4)} - 2y'' + y = 16e^t$    (8%)
- (2)  $x^2 y'' + xy' - y = \ln x$    (8%)
- (3)  $x(1-x)y'' + 2(1-2x)y' - 2y = 6x - 2$    (8%)

4. 已知一微分方程式  $\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{d}{dx} \left( \frac{y}{x} \right) + \frac{2y}{x^2} = x^{-2}$  ( $x > 0$ )

- (1) 試求此微分方程的補解  $y_h(x) = ?$  (6%)
- (2) 以變數變換，令  $t = \ln x$ ，則  $y(x) = Y(t)$ ，試求轉換後以  $Y(t)$  表示的微分方程式。 (6%)
- (3) 試求轉換後微分方程的補解  $Y_h(t) = ?$  (6%)
- (4) 試求轉換後微分方程的特解  $Y_p(t) = ?$  (6%)
- (5) 試將  $Y(t)$  轉換回  $y(x)$ 。 (3%)

5. 已知單自由度振動系統其數學表示為  $m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = f(t)$ ，若給定質量塊  $m = 4$ ，阻尼係數  $c = 0$  與彈簧常數  $k = 36$  並且質量塊為靜止狀態即其初始條件  $y(0) = 0$  與  $\dot{y}(0) = 0$ ，給一外力為  $f(t) = \cos \omega t$

試問：

- (1) 當  $\omega = ?$ ，此系統會產生共振行為。 (4%)
- (2) 當系統產生共振時，此時其解為何？ (8%)

6. 已知微分方程式  $x^2 y'' - (x^2 + 2x)y' + (x+2)y = 0$

- (1) 試以觀察法求一補解  $y_1$ 。 (3%)
- (2) 試求其通解。 (7%)