國立臺灣海洋大學河海工程學系 2016 工程數學(一) 第一次大考參考解答

系級：__________ 學號：__________ 姓名：__________

1. 已知 xy 平面上有一曲線 $f(x,y)=0$ 恆通過點 $(1,0)$，且此曲線上任一點 (x,y) 的切線斜率($\frac{dy}{dx}$)為 $\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{xy}$，試求此曲線方程式。 (10%)

2. 已知 $(2xy^3-3y)-(3x+\alpha x^2y^2-2\alpha y)y'=0$ 為正合微分方程

   (1) 試求 α 之值。(5%)

   (2) 求此正合微分方程式之通解。(5%) (103 台科大營建)

3. 已知微分方程式為 $2y'+y=\frac{x}{y}$

   (1) 此微分方程式為線性或非線性? (5%) 並以一階線性法求解。(8%)
   (若為線性，直接求解；若非線性，使用變數變換法轉成線性，再求解)

   (2) 此微分方程式為正合(exact)或非正合? (5%) 並以正合法求解。(8%)
   (若正合，直接求解；若非正合，先求出積分因子，再求解)

4. 已知微分方程式為 $y'+3xy=xy^2+2x$

   (1) 此微分方程式為線性或非線性? (3%)

   (2) 先以觀察法得一特解 S。 (3%)

   (3) 再由變數變換($y=W+S$)將上述 ODE 轉換為以 W 表示之微分方程。 (5%)
   請問:轉換後為何種類型微分方程式。 (3%)

   (4) 試求 $W=?$ 並寫出最後解的表示式($y=W+S$)。 (8%)

   (5) 試以分離變數法求解。(8%)

5. 試解下列各微分方程

   (1) $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{\cos y-2xy}$ (8%)

   (2) $(\sin x)y'+(\cos x)y=\cos 2x$ (8%)

   (3) $(2y^2-9xy)dx+(3xy-6x^2)dy=0$ (8%)

<參考解答>

1. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{(1+x^2)(1+y^2)}{xy}$ $\Rightarrow \dfrac{y}{(1+y^2)}dy=\dfrac{(1+x^2)}{x}dx$

$$\Rightarrow \int \frac{y}{1+y^2}dy=\int \frac{1+x^2}{x}dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\ln(1+y^2)=\ln x+\frac{1}{2}x^2+c$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\ln(1+y^2)-\ln x-\frac{1}{2}x^2-c=0$$

$\therefore$ $f(x,y)=\dfrac{1}{2}\ln(1+y^2)-\ln|x|-\dfrac{1}{2}x^2-c$

又 $f(x,y)=0$ 恆通過點 $(1,0)$，此即為 $x=1$, $y=0$

可得 $c=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore$ 曲線方程是為 $\dfrac{1}{2}\ln(1+y^2)-\ln|x|-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}=0$

或是再整理 $\dfrac{1}{2}\ln(1+y^2)-\ln|x|-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}=0$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\ln\frac{1+y^2}{x^2}=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y^2=x^2e^{x^2-1}-1$$

2. (1) $(2xy^3-3y)-(3x+\alpha x^2y^2-2\alpha y)y'=0$

$$\Rightarrow (2xy^3-3y)dx-(3x+\alpha x^2y^2-2\alpha y)dy=0$$

令 $M=2xy^3-3y$ $\Rightarrow \dfrac{\partial M}{\partial y}=6xy^2-3$

$N=-(3x+\alpha x^2y^2-2\alpha y)$ $\Rightarrow \dfrac{\partial N}{\partial x}=-3-2\alpha xy^2$

$\because$ 此為正合微分方程

$\therefore$ $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$ $\Rightarrow \alpha=-3$

(2) $M=\dfrac{\partial\phi}{\partial x}=2xy^3-3y$ $\Rightarrow \phi=x^2y^3-3xy+f(y)$

$N=\dfrac{\partial\phi}{\partial y}=-(3x-3x^2y^2+6y)$ $\Rightarrow \phi=-3xy+x^2y^3-3y^2+g(x)$

$\therefore$ 解為 $\phi(x,y)=c$ $\Rightarrow x^2y^3-3xy-3y^2=c$

3. (1) 此為 Bernoulli ODE，為非線性微分方程式

$$2y' + y = \frac{x}{y} \quad \Rightarrow 2yy' + y^2 = x$$

令 $u = y^2 \quad \Rightarrow u' = 2yy'$

$2yy' + y^2 = x \quad \Rightarrow u' + u = x$ ⟶ 此為一階線性 ODE

積分因子 $\mu = e^{\int 1dx} = e^x$

同乘積分因子可得 $e^x u' + e^x u = xe^x$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(e^x u) = xe^x$$

$$\Rightarrow e^x u = \int xe^x dx = xe^x - e^x + c$$

$$\Rightarrow u = x - 1 + ce^{-x}$$

$$\Rightarrow y^2 = x - 1 + ce^{-x}$$

(2) $2y' + y = \dfrac{x}{y} \quad \Rightarrow (y^2 - x)dx + 2ydy = 0$

令 $M = y^2 - x \quad \Rightarrow \dfrac{\partial M}{\partial y} = 2y$

$N = 2ydy \quad \Rightarrow \dfrac{\partial N}{\partial x} = 0$

$\because$ 判別式 $\dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial x}$

$\therefore$ 此為非正合微分方程

由 $\dfrac{1}{N}(\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}) = 1$ 可知其積分因子為 $\mu = e^{\int \frac{1}{N}(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x})dx} = e^{\int 1dx} = e^x$

同乘積分因子後可得 $e^x(y^2 - x)dx + 2e^x ydy = 0$

此為正合微分方程

故可得 $\overline{M} = \dfrac{\partial \phi}{\partial x} = e^x(y^2 - x) \quad \Rightarrow \phi = e^x y^2 - e^x x + e^x + f(y)$

$\overline{N} = \dfrac{\partial \phi}{\partial y} = 2e^x ydy = 0 \quad \Rightarrow \phi = e^x y^2 + g(x)$

$\therefore$ 解為 $\phi(x, y) = c \quad \Rightarrow e^x y^2 - e^x x + e^x = c \quad \Rightarrow y^2 = x - 1 + ce^{-x}$

4. (1) 此為 Riccati ODE，為非線性微分方程式

(2) 由觀察可得一解 $S = 1$

(3) 令 $y = W + S = W + 1$ 代入 ODE 可得

$$W' + 3x(W+1) = x(W+1)^2 + 2x$$

$$\Rightarrow W' + 3xW + 3x = xW^2 + 2xW + x + 2x$$

$\Rightarrow W' + xW = xW^2 \qquad \therefore$ 可知此為 Bernoulli ODE

(4) $W' + xW = xW^2 \quad \Rightarrow W^{-2}W' + xW^{-1} = x$

令 $u = W^{-1} \quad \Rightarrow u' = -W^{-2}W'$ 代回 ODE 可得

$u' - xu = -x$ ⟶ 此為一階線性 ODE

$\therefore$ 積分因子 $\mu = e^{-\int x dx} = e^{-\frac{1}{2}x^2}$

將 ODE 同乘積分因子後可得 $e^{-\frac{1}{2}x^2}u' - xe^{-\frac{1}{2}x^2}u = -xe^{-\frac{1}{2}x^2}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(e^{-\frac{1}{2}x^2}u) = -xe^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{1}{2}x^2}u = -\int xe^{-\frac{1}{2}x^2}dx$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{1}{2}x^2}u = e^{-\frac{1}{2}x^2} + c$$

$$\Rightarrow u = 1 + ce^{\frac{1}{2}x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{W} = ce^{\frac{1}{2}x^2} + 1$$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{ce^{\frac{1}{2}x^2} + 1}$$

$$y = W + S = \frac{1}{ce^{\frac{1}{2}x^2} + 1} + 1$$

(5) $y' + 3xy = xy^2 + 2x \quad \Rightarrow y' = xy^2 - 3xy + 2x$

$$\Rightarrow y' = x(y^2 - 3y + 2) = x(y-1)(y-2)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(y-1)(y-2)}dy = xdx$$

$$\Rightarrow \int (\frac{1}{y-2} - \frac{1}{y-1})dy = \int xdx$$

$$\Rightarrow \ln|y-2| - \ln|y-1| = \frac{1}{2}x^2 + c_1$$

$$\Rightarrow \ln\left|\frac{y-2}{y-1}\right| = \frac{1}{2}x^2 + c_1$$

$$\Rightarrow \frac{y-2}{y-1} = ce^{\frac{1}{2}x^2}$$

$$\Rightarrow y = 1 + \frac{1}{1 - ce^{\frac{1}{2}x^2}}$$

若令 $\bar{c} = -c$ 則可得與(4)相同結果

5. (1) $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{\cos y-2xy}$ $\Rightarrow \frac{dx}{dy}=\frac{\cos y-2xy}{y^2}$

$\Rightarrow \frac{dx}{dy}+\frac{2}{y}x=\frac{\cos y}{y^2}$ 此為 x 的一階線性 ODE

$\therefore$ 積分因子為 $\mu=e^{\int\frac{2}{y}dy}=e^{2\ln|y|}=y^2$

同乘積分因子後可得 $y^2\frac{dx}{dy}+2yx=\cos y$

$$\Rightarrow \frac{d}{dy}(xy^2)=\cos y$$

$$\Rightarrow xy^2=\int\cos y\,dy=\sin y+c$$

$$\Rightarrow x=\frac{1}{y^2}(\sin y+c)$$

(2) $(\sin x)y'+(\cos x)y=\cos 2x$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(y\sin x)=\cos 2x$$

$$\Rightarrow y\sin x=\int\cos 2x\,dx=\frac{1}{2}\sin 2x+c$$

$$\Rightarrow y=\frac{1}{\sin x}(\frac{1}{2}\sin 2x+c)$$

(3) $(2y^2-9xy)dx+(3xy-6x^2)dy=0$ (8%)

$$\Rightarrow 2y^2dx-9xydx+3xydy-6x^2dy=0$$

$$\Rightarrow y(2ydx+3xdy)-3x(3ydx+2xdy)=0$$

$$\Rightarrow y\frac{d(x^2y^3)}{xy^2}-3x\frac{d(x^3y^2)}{x^2y}=0$$

$$\Rightarrow d(x^2y^3)-3d(x^3y^2)=0$$

$$\Rightarrow \int d(x^2y^3)-3\int d(x^3y^2)=\int 0\,dx$$

$$\Rightarrow x^2y^3-3x^3y^2=c$$