

系級：_____ 學號：_____ 姓名：_____

1. 已知 xy 平面上有一曲線 $f(x, y) = 0$ 恆通過點 $(1, 0)$ ，且此曲線上任一點 (x, y) 的切線斜率 $(\frac{dy}{dx})$ 為 $\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{xy}$ ，試求此曲線方程式。(10%)

2. 已知 $(2xy^3 - 3y) - (3x + \alpha x^2 y^2 - 2\alpha y)y' = 0$ 為正合微分方程
 - (1) 試求 α 之值。(5%)
 - (2) 求此正合微分方程式之通解。(5%)

3. 已知微分方程式為 $2y' + y = \frac{x}{y}$
 - (1) 此微分方程式為線性或非線性?(5%) 並以一階線性法求解。(8%)
(若為線性，直接求解；若非線性，使用變數變換法轉成線性，再求解)
 - (2) 此微分方程式為正合(exact)或非正合?(5%) 並以正合法求解。(8%)
(若正合，直接求解；若非正合，先求出積分因子，再求解)

4. 已知微分方程式為 $y' + 3xy = xy^2 + 2x$
 - (1) 此微分方程式為線性或非線性?(3%)
 - (2) 先以觀察法得一特解 S 。(3%)
 - (3) 再由變數變換($y = W + S$)將上述 ODE 轉換為以 W 表示之微分方程。(5%)
請問：轉換後為何種類型微分方程式。(3%)
 - (4) 試求 $W = ?$ 並寫出最後解的表示式($y = W + S$)。(8%)
 - (5) 試以分離變數法求解。(8%)

5. 試解下列各微分方程
 - (1) $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{\cos y - 2xy}$ (8%)
 - (2) $(\sin x)y' + (\cos x)y = \cos 2x$ (8%)
 - (3) $(2y^2 - 9xy)dx + (3xy - 6x^2)dy = 0$ (8%)