國立臺灣海洋大學河海工程學系 2016 工程數學(一) 期末考參考解答

系級：________　　學號：________　　姓名：________

1. $A=\begin{vmatrix}7&3&8&9&2\\1&2&3&4&2\\6&1&3&9&7\\4&1&7&3&1\\2&4&6&8&4\end{vmatrix}$，**試問:** $A=?$ **(10%)**

2. 給一矩陣 $A=\begin{bmatrix}a&1&-2\\1&b&d\\-2&d&c\end{bmatrix}$，**其中** $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{d}$ **均為常數，並且知道矩陣** $\boldsymbol{A}$ **有**

三特徵值 λ_1、λ_2**與** λ_3 **分別對應的特徵向量為** $x^1=\begin{Bmatrix}2\\-4\\x_1\end{Bmatrix}$、$x^2=\begin{Bmatrix}x_2\\0\\3\end{Bmatrix}$**與**

$x^3=\begin{Bmatrix}1\\x_3\\1\end{Bmatrix}$，**若已知** $\lambda_1=6$，**試問:**

(1) $\boldsymbol{x_1}$、$\boldsymbol{x_2}$ **與** $\boldsymbol{x_3}$ **為何? (6%)**

(2)特徵值 λ_2 **與** λ_3 **為何? (4%)**

(3) $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{d}$ **之值為何? (12%)**

3. (1) 若 $A=\begin{bmatrix}a&b\\0&c\end{bmatrix}=SDS^{-1}$ **且** $a\neq c$，**其中** D **為對角矩陣，試求** D **與** S **為何?**

(10%)

(2) 試問 $A^{100}=?$ **(5%)**

4. $\boldsymbol{A}$ **為** 3×3 **矩陣，若已知** $\boldsymbol{A}$ **之特徵值為** $\lambda_1=1$，$\lambda_2=-2$，$\lambda_3=3$ **且其所對應的**

特徵向量為 $x^1=\begin{Bmatrix}-1\\1\\1\end{Bmatrix}$，$x^2=\begin{Bmatrix}-11\\-1\\14\end{Bmatrix}$，$x^3=\begin{Bmatrix}1\\1\\1\end{Bmatrix}$，**試問:**

(1) $A=?$ **(10%)**

(2) $|A|=?$ **(4%)**

(3) $A^3-2A^2-5A=?$ **(5%)**

(4) 若 $A^{-1}=pA^2+qA+rI$ **，則** $p=?$，$q=?$，$r=?$ **(6%)**

(5) A^{-1} **的特徵值為何? (3%)**

5. 給一方程式 $4x_1^2+6x_1x_2-4x_2^2=10$，試問此二次式代表何種圓錐曲線? **(10%)**
(請將之轉換至主軸，即將舊座標向量 $\mathbf{x}^T=[x_1\ x_2]$ 轉換至新座標向量 $\mathbf{y}^T=[y_1\ y_2]$**)**

6. 令 $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix}$, $\bar{y}=\begin{Bmatrix}y_1(t)\\ y_2(t)\end{Bmatrix}$, $\vec{f}=\begin{Bmatrix}0\\ -2e^t\end{Bmatrix}$，試求方程式 $\dfrac{d\bar{y}}{dt}=A\bar{y}+\vec{f}$ 的解。

(15%)

參考解答:

1. $A=\begin{vmatrix} 7 & 3 & 8 & 9 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 6 & 1 & 3 & 9 & 7 \\ 4 & 1 & 7 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 4 \end{vmatrix}$，試問: $A=?$ **(10%)**

∵ 第二列與第五列差 **2** 倍，兩列成比例

∴ 此行列式值為 **0**

2. 給一矩陣 $A=\begin{bmatrix} a & 1 & -2 \\ 1 & b & d \\ -2 & d & c \end{bmatrix}$，其中 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{d}$ 均為常數，並且知道矩陣 $\boldsymbol{A}$ 有

三特徵值 λ_1、λ_2 與 λ_3 分別對應的特徵向量為 $x^1=\begin{Bmatrix} 2 \\ -4 \\ x_1 \end{Bmatrix}$、$x^2=\begin{Bmatrix} x_2 \\ 0 \\ 3 \end{Bmatrix}$ 與

$x^3=\begin{Bmatrix} 1 \\ x_3 \\ 1 \end{Bmatrix}$，若已知 $\lambda_1=6$，試問:

(1) $\boldsymbol{x_1}$、$\boldsymbol{x_2}$ 與 $\boldsymbol{x_3}$ 為何? **(6%)**

(2)特徵值 λ_2 與 λ_3 為何? **(4%)**

(3) $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{d}$ 之值為何? **(12%)**

∵ 此為對稱矩陣

∴ 其特徵向量會相互正交

(1) $(x^1)^T\cdot x^2=0 \quad \Rightarrow 3x_1+2x_2=0$

$(x^1)^T\cdot x^3=0 \quad \Rightarrow x_1-4x_3=-2$

$(x^2)^T\cdot x^3=0 \quad \Rightarrow x_2=-3$

∴ 可得 $x_1=2$ 與 $x_3=1$

即 $x^1=\begin{Bmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{Bmatrix}$、$x^2=\begin{Bmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{Bmatrix}$ 與 $x^3=\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$

(2) $Ax^1=\lambda_1 x^1 \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} a & 1 & -2 \\ 1 & b & d \\ -2 & d & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{Bmatrix} = 6 \begin{Bmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow a=10$

$Ax^2=\lambda_2 x^2 \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} 10 & 1 & -2 \\ 1 & b & d \\ -2 & d & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{Bmatrix} = \lambda_2 \begin{Bmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \lambda_2=12$

$Ax^3=\lambda_3 x^3 \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} 10 & 1 & -2 \\ 1 & b & d \\ -2 & d & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \lambda_3 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \lambda_3=9$

(3) $Ax^1=\lambda_1 x^1 \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} 10 & 1 & -2 \\ 1 & b & d \\ -2 & d & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{Bmatrix} = 6 \begin{Bmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \begin{cases} -4b+2d=-26 \\ -4d+2c=16 \end{cases}$

$Ax^2=\lambda_2 x^2 \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} 10 & 1 & -2 \\ 1 & b & d \\ -2 & d & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{Bmatrix} = 12 \begin{Bmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \begin{cases} -3+3d=0 \\ 6+3c=36 \end{cases}$

$\therefore$ 可得 $d=1$，$c=10$ 與 $b=7$

即 $A=\begin{bmatrix} 10 & 1 & -2 \\ 1 & 7 & 1 \\ -2 & 1 & 10 \end{bmatrix}$

3. (1) 若 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}=SDS^{-1}$ 且 $a \neq c$，其中 D 為對角矩陣，試求 D 與 S 為何? **(10%)**

(2) 試問 $A^{100}=?$ **(5%)**

(1) $|A-\lambda I|=0 \quad \Rightarrow \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ 0 & c-\lambda \end{vmatrix}=0 \quad \Rightarrow \lambda=a$ or c

當 $\lambda_1=a \quad \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & b \\ 0 & c-a \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow x^1=\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$

當 $\lambda_2=c \quad \Rightarrow \begin{vmatrix} a-c & b \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow x^2=\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \dfrac{b}{c-a} \\ 1 \end{Bmatrix}$

$$\therefore \; D=\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}, \quad S=\begin{bmatrix} 1 & \dfrac{b}{c-a} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow S^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{b}{c-a} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(2) $A=SDS^{-1}$

$$\Rightarrow A^{100}=SD^{100}S^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & \dfrac{b}{c-a} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a^{100} & 0 \\ 0 & c^{100} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{b}{c-a} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a^{100} & \dfrac{b(c^{100}-a^{100})}{c-a} \\ 0 & c^{100} \end{bmatrix}$$

4. ***A*** **為**3×3**矩陣，若已知** ***A*** **之特徵值為** $\lambda_1=1$，$\lambda_2=-2$，$\lambda_3=3$ **且其所對應的特徵向量為** $x^1=\begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$，$x^2=\begin{Bmatrix} -11 \\ -1 \\ 14 \end{Bmatrix}$，$x^3=\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$ **，試問:**

(1) $A=?$ **(10%)**

(2) $|A|=?$ **(4%)**

(3) $A^3-2A^2-5A=?$ **(5%)**

(4) **若** $A^{-1}=pA^2+qA+rI$ **，則** $p=?$，$q=?$，$r=?$ **(6%)**

(5) A^{-1} **的特徵值為何? (3%)**

(1) $AS=SD \quad \Rightarrow A=SDS^{-1}$

由 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=-2$，$\lambda_3=3 \;\Rightarrow D=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

由 $x^1=\begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$，$x^2=\begin{Bmatrix} -11 \\ -1 \\ 14 \end{Bmatrix}$，$x^3=\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \;\Rightarrow S=\begin{bmatrix} -1 & -11 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 14 & 1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow S^{-1}=\frac{1}{30}\begin{bmatrix} -15 & 25 & -10 \\ 0 & -2 & 2 \\ 15 & 3 & 12 \end{bmatrix}$$

$$A=SDS^{-1}=\begin{bmatrix} -1 & -11 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 14 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\frac{1}{30}\begin{bmatrix} -15 & 25 & -10 \\ 0 & -2 & 2 \\ 15 & 3 & 12 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

(2) $|A|=\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3=-6$

(3) **特徵方程式:** $(\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda-3)=0$

$$\Rightarrow \lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

由 Cayley Hamilton 可知 $A^3 - 2A^2 - 5A + 6I = 0$

$$\Rightarrow A^3 - 2A^2 - 5A = -6I$$

(4) $A^3 - 2A^2 - 5A = -6I$

$$\Rightarrow A^{-1}(A^3 - 2A^2 - 5A) = -6A^{-1}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{6}(A^2 - 2A - 5I)$$

$$\therefore\ p = -\frac{1}{6},\ q = \frac{1}{3},\ r = \frac{5}{6}$$

(5) A^{-1} 的特徵值為 $\frac{1}{\lambda_1}$、$\frac{1}{\lambda_2}$、$\frac{1}{\lambda_3}$ 即 1、$-\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$

5. 給一方程式 $4x_1^2 + 6x_1x_2 - 4x_2^2 = 10$，**試問此二次式代表何種圓錐曲線? (10%)**
(請將之轉換至主軸，即將舊座標向量 $\mathbf{x}^T = \{x_1\ x_2\}$ **轉換至新座標向量** $\mathbf{y}^T = \{y_1\ y_2\}$**)**

$$4x_1^2 + 6x_1x_2 - 4x_2^2 = 10 \quad \Rightarrow \{x_1\ x_2\}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = 10$$

令 $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 3 \\ 3 & -4-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 25 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = 5 \text{ or } -5$$

當 $\lambda_1 = 5 \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow x^1 = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{Bmatrix} 3 \\ 1 \end{Bmatrix}$

當 $\lambda_2 = -5 \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow x^2 = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{Bmatrix} -1 \\ 3 \end{Bmatrix}$

$$\therefore\ D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix},\quad S = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ A = SDS^{-1} = SDS^T$$

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \mathbf{x}^T SDS^T\mathbf{x} = (S^T\mathbf{x})^T D(S^T\mathbf{x}) = 10$$

令 $\mathbf{y} = S^T\mathbf{x} \quad \Rightarrow \mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \mathbf{y}^T D\mathbf{y} = 10$

$$\Rightarrow \{y_1\ y_2\}\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = 10$$

$\Rightarrow 5y_1^2 - 5y_2^2 = 10 \quad \Rightarrow y_1^2 - y_2^2 = 2$ 此為雙曲線 (hyperbola)

6. 令 $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix}$，$\bar{y}=\begin{Bmatrix}y_1(t)\\ y_2(t)\end{Bmatrix}$，$\vec{f}=\begin{Bmatrix}0\\ -2e^t\end{Bmatrix}$，試求方程式 $\dfrac{d\,\bar{y}}{dt}=A\,\bar{y}+\vec{f}$ 的解。

(15%) (105 中央大地)

$$\det(A-\lambda I)=0 \quad \Rightarrow \begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ 1 & -\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-\lambda-2=0 \quad \Rightarrow \lambda=-1, 2$$

當 $\lambda_1=-1 \quad \Rightarrow \begin{bmatrix}2 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix} \quad \Rightarrow x^1=\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1\\ -1\end{Bmatrix}$

當 $\lambda_1=2 \quad \Rightarrow \begin{bmatrix}-1 & 2\\ 1 & -2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix} \quad \Rightarrow x^2=\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}2\\ 1\end{Bmatrix}$

$$S=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix},\ S^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & -2\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\frac{d\,\bar{y}}{dt}=A\,\bar{y}+\vec{f} \quad \Rightarrow \frac{d\,\bar{y}}{dt}=SDS^{-1}\,\bar{y}+\vec{f}$$

$$\Rightarrow \frac{d(S^{-1}\bar{y})}{dt}=DS^{-1}\,\bar{y}+S^{-1}\vec{f}$$

令 $\vec{x}=S^{-1}\bar{y} \quad \Rightarrow \bar{y}=S\vec{x}$

$$\therefore \frac{d(S^{-1}\bar{y})}{dt}=DS^{-1}\,\bar{y}+S^{-1}\vec{f}$$

$$\Rightarrow \frac{d\,\vec{x}}{dt}=D\vec{x}+S^{-1}\vec{f}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix}x_1'(t)\\ x_2'(t)\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{Bmatrix}+\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & -2\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\ -2e^t\end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix}x_1'(t)\\ x_2'(t)\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}\frac{4}{3}e^t\\ -\frac{2}{3}e^t\end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x_1'(t)=-x_1(t)+\frac{4}{3}e^t\\ x_2'(t)=2x_2(t)-\frac{2}{3}e^t\end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases}x_1(t)=c_1e^{-t}+\frac{2}{3}e^t\\ x_2(t)=c_2e^{2t}+\frac{2}{3}e^t\end{cases}$$

$$\bar{y}=S\,\vec{x} \quad \Rightarrow \begin{Bmatrix}y_1(t)\\ y_2(t)\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix}y_1(t)\\ y_2(t)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}c_1e^{-t}+2c_2e^{2t}+2e^t\\ -c_1e^{-t}+c_2e^{2t}\end{Bmatrix}$$