

系級：_____ 學號：_____ 姓名：_____

1. $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 8 & 9 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 6 & 1 & 3 & 9 & 7 \\ 4 & 1 & 7 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 4 \end{pmatrix}$, 試問: $A = ?$ (10%)

2. 給一矩陣 $A = \begin{bmatrix} a & 1 & -2 \\ 1 & b & d \\ -2 & d & c \end{bmatrix}$, 其中 a, b, c, d 均為常數, 並且知道矩陣 A 有

三特徵值 λ_1, λ_2 與 λ_3 分別對應的特徵向量為 $x^1 = \begin{Bmatrix} 2 \\ -4 \\ x_1 \end{Bmatrix}$ 、 $x^2 = \begin{Bmatrix} x_2 \\ 0 \\ 3 \end{Bmatrix}$ 與

$x^3 = \begin{Bmatrix} 1 \\ x_3 \\ 1 \end{Bmatrix}$, 若已知 $\lambda_1 = 6$, 試問:

- (1) x_1, x_2 與 x_3 為何? (6%)
- (2) 特徵值 λ_2 與 λ_3 為何? (4%)
- (3) a, b, c, d 之值為何? (12%)

3. (1) 若 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} = SDS^{-1}$ 且 $a \neq c$, 其中 D 為對角矩陣, 試求 D 與 S 為何? (10%)

(2) 試問 $A^{100} = ?$ (5%)

4. A 為 3×3 矩陣, 若已知 A 之特徵值為 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 3$ 且其所對應的

特徵向量為 $x^1 = \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$, $x^2 = \begin{Bmatrix} -11 \\ -1 \\ 14 \end{Bmatrix}$, $x^3 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$, 試問:

- (1) $A = ?$ (10%)
- (2) $|A| = ?$ (4%)
- (3) $A^3 - 2A^2 - 5A = ?$ (5%)
- (4) 若 $A^{-1} = pA^2 + qA + rI$, 則 $p = ?, q = ?, r = ?$ (6%)
- (5) A^{-1} 的特徵值為何? (3%)

5. 給一方程式 $4x_1^2 + 6x_1x_2 - 4x_2^2 = 10$ ，試問此二次式代表何種圓錐曲線？(10%)

(請將之轉換至主軸，即將舊座標向量 $\mathbf{x}^T = [x_1 \ x_2]$ 轉換至新座標向量

$$\mathbf{y}^T = [y_1 \ y_2])$$

6. 令 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ， $\bar{\mathbf{y}} = \begin{Bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{Bmatrix}$ ， $\bar{\mathbf{f}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -2e^t \end{Bmatrix}$ ，試求方程式 $\frac{d\bar{\mathbf{y}}}{dt} = A\bar{\mathbf{y}} + \bar{\mathbf{f}}$ 的解。

(15%)