國立臺灣海洋大學河海工程學系 2016 工程數學(二) 第二次大考參考解答

系級：_______________　　學號：_____________　　姓名：____________

1. 已知在 $-\pi \le x \le \pi$ 上，$f(x)=|x|$，試問:

(1) $f(x)$ 的傅立葉級數展開為何? **(5%)**

(2) $\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{5^2}+\cdots=?$ **(5%)**

(3) $\dfrac{1}{1^4}+\dfrac{1}{3^4}+\dfrac{1}{5^4}+\cdots=?$ **(5%)**

2. 已知 $f(x)=\dfrac{3}{2}(x+2)$ 就其在區間 $(0,2)$ 之部分，全幅展開得 $g(x)$，半幅正弦展開得 $G(x)$，半幅餘弦展開得 $F(x)$，試問: $g(-1)$、$F(6)$、$F(-1)$、$G(6)$ 與 $G(-5)$ 之值。 **(15%)**

3. 已知函數 $f(x)=3\sin x-4(1+\sin x)\cos^2 x$，試求其複數形式的傅立葉級數。 **(10%)**

4. 已知函數 $f(x)=\begin{cases}\cos x, & |x|<\dfrac{\pi}{2}\\ 0, & |x|>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$，試求:

(1) $f(x)$ 的傅立葉積分 **(10%)**

(2) 請計算 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1-\omega^2}\cos\frac{\pi\omega}{2}\,d\omega$ 之值。 **(5%)**

5. 已知函數 $f(x)=e^{-|x|}$ 與 $g(x)=H(x+1)-H(x-1)$，其中 $H(x)$ 為單位步階函數，其定義為 $H(x)=\begin{cases}1, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$

(1) 試求：$f(x)$ 之傅立葉轉換 $F(\omega)=?$ **(5%)**

(2) 試求：$g(x)$ 之傅立葉轉換 $G(\omega)=?$ **(5%)**

(3) 試求：$\displaystyle\int_{\infty}^{-\infty}\frac{\sin^2\omega}{\omega^2}\,d\omega=?$ **(5%)**

(4) 取 $q(x)=f(x)*g(x)$，試問：$q(x)=?$ **(5%)**
(**hint：** 分 $x<-1$，$-1<x<1$，$1<x$ 討論)

(5) $Q(\omega)=\mathcal{F}[q(x)]=?$ **(5%)**

6. (1) 已知 $f(x)=\delta(x)$，試求此函數之傅立葉轉換 $F(\omega)=?$ **(5%)**

(2) 函數 $g(x)=e^{-ax}\cdot H(x)$ 且 $a>0$，試求此函數之傅立葉轉換 $G(\omega)=?$ **(5%)**

(3) 試將此微分方程 $\dfrac{du(x)}{dx}+2u(x)=\delta(x)$ 作傅立葉轉換並求出 $U(\omega)=?$ **(5%)**

(4) 試問 $u(x)=\mathcal{F}^{-1}[U(\omega)]=?$ **(5%)**

傅立葉級數展開

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{2n\pi x}{T}+b_n\sin\frac{2n\pi x}{T})$$

$$a_0=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\,dx\text{，}\ a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos\frac{2n\pi x}{T}\,dx\text{，}\ b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\sin\frac{2n\pi x}{T}\,dx$$

傅立葉級數之 Parseval 恆等式： $\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(x)\,dx=a_0^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$

傅立葉積分

$$f(x)=\int_0^{\infty}[A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x]\,d\omega$$

其中 $A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x\,dx$，$B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\omega x\,dx$

傅立葉複數形式級數展開

$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n e^{i\omega_n x}$， 其中 $\omega_n=\frac{2n\pi}{T}$，$c_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)e^{-i\omega_n x}\,dx$

傅立葉轉換： $F(\omega)=\mathcal{F}[f(x)]=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx$

傅立葉反轉換： $f(x)=\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}\,d\omega$

傅立葉轉換的 Parseval 恆等式： $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2\,d\omega$

Convolution : $f*g=\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$

$$\mathcal{F}[f'(t)]=i\omega F(\omega)\Rightarrow\mathcal{F}[f^{(n)}(t)]=(i\omega)^n F(\omega)$$

$$\mathcal{F}[t^n f(t)]=i^n\frac{d^n}{d\omega^n}F(\omega)\Rightarrow\mathcal{F}[f^{(n)}(t)]=(i\omega)^n F(\omega)$$

$\int_a^b f(x)\delta(x-x_0)\,dx=f(x_0)$ 其中 $a<x_0<b$

尤拉公式: $\cos x=\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})$

$\sin x=\frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix})$

積化和差

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$

$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$，$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$

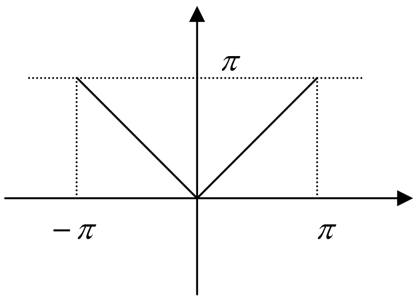
參考解答：

1. 已知在 $-\pi \le x \le \pi$ 上， $f(x)=|x|$ ，試問：

(1) $f(x)$ **的傅立葉級數展開為何？(5%)**

(2) $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=?$ **(5%)**

(3) $\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\cdots=?$ **(5%)**



(1) 可知 $T=2\pi$ 且此為偶函數，即 $b_n=0$

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2n\pi x}{T}+b_n\sin\frac{2n\pi x}{T}\right)$$

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\,dx=\frac{\pi}{2}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cdot\cos nx\,dx=\frac{2[(-1)^n-1]}{n^2\pi},$$

$$f(x)=\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2}\cos nx$$

(2) 在 $x=0$ 時， $f(0)=\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2}$

當 $n=\text{even}\quad\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2}=0$

當 $n=\text{odd}\quad\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{-2}{(2m-1)^2}$

$\therefore\quad f(0)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^2}\qquad\Rightarrow\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$

即 $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}$

(3) 由 Parseval 恆等式： $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$

$$\Rightarrow \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\,dx = \frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2[(-1)^n - 1]}{n^2\pi}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{\pi^2}{3} = \frac{\pi^2}{4} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^4}$$

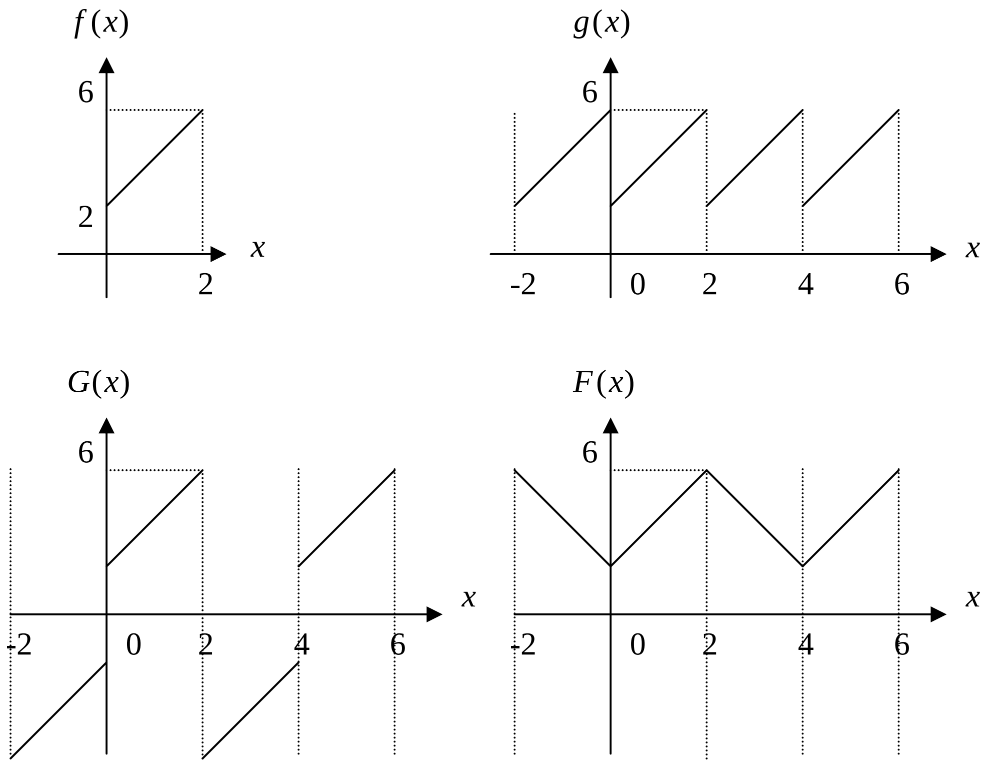
當 $n = \text{even}$ $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^4} = 0$

當 $n = \text{odd}$ $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^4} = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{(2m-1)^4}$

$\therefore$ $\frac{\pi^2}{3} = \frac{\pi^2}{4} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^4}$ $\Rightarrow \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$

即 $\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$

2. 已知 $f(x) = \frac{3}{2}(x+2)$ **就其在區間** $(0, 2)$ **之部分，全幅展開得** $g(x)$ **，半幅正弦展開得** $G(x)$ **，半幅餘弦展開得** $F(x)$ **，試問：** $g(-1)$、$F(6)$、$F(-1)$、$G(6)$ **與** $G(-5)$ **之值。 (15%)**



全幅展開 ($T = 2$)

$\therefore$ $g(-1) = g(-1+2) = g(1) = f(1) = \frac{9}{2}$

半幅正弦展開 ($T=4$)

$$\therefore \quad G(6)=\frac{G(6^-)+G(6^+)}{2}=0$$

$$G(-5)=G(-5+4)=G(-1)=-G(1)=-f(1)=-\frac{9}{2}$$

半幅餘弦展開 ($T=4$)

$$\therefore \quad F(6)=F(2)=f(2)=6$$

$$F(-1)=F(1)=f(1)=\frac{9}{2}$$

3. 已知函數 $f(x)=3\sin x-4(1+\sin x)\cos^2 x$，試求其複數形式的傅立葉級數。(10%)

$$f(x)=3\sin x-4(1+\sin x)\cos^2 x=3\sin x-4(1+\sin x)(\frac{1+\cos 2x}{2})$$
$$=3\sin x-2(1+\sin x+\cos 2x+\sin x\cdot\cos 2x)$$
$$=3\sin x-2-2\sin x-2\cos 2x-(\sin 3x-\sin x)$$
$$=-2+2\sin x-\sin 3x-2\cos 2x$$

由尤拉公式 $\cos x=\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})$，$\sin x=\frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix})$ 可得

$$f(x)=-2+2\sin x-\sin 3x-2\cos 2x$$
$$=-2+\frac{2}{2i}(e^{ix}-e^{-ix})-\frac{1}{2i}(e^{i3x}-e^{-i3x})-\frac{2}{2}(e^{i2x}+e^{-i2x})$$
$$=-2-ie^{ix}+ie^{-ix}+\frac{i}{2}e^{i3x}-\frac{i}{2}e^{-i3x}-e^{i2x}-e^{-i2x}$$

所以可知 $f(x)$ 複數形式傅立葉級數為

$$-\frac{i}{2}e^{-i3x}-e^{-i2x}+ie^{-ix}-2-ie^{ix}-e^{i2x}+\frac{i}{2}e^{i3x}$$

4. 已知函數 $f(x)=\begin{cases}\cos x, & |x|<\frac{\pi}{2}\\ 0, & |x|>\frac{\pi}{2}\end{cases}$，試求:

(1) $f(x)$ 的傅立葉積分 (10%)

(2) 請計算 $\int_0^\infty \frac{1}{1-\omega^2}\cos\frac{\pi\omega}{2}d\omega$ 之值。 (5%)

(1) $\because \quad f(x)$ 為偶函數

$\therefore$ 可知 $B(\omega)=0$

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x\,dx$$
$$=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\cdot\cos\omega x\,dx$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}[\cos(1+\omega)x+\cos(1-\omega)x]\,dx$$
$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\cos\frac{\omega\pi}{2}}{1+\omega}+\frac{\cos\frac{\omega\pi}{2}}{1-\omega}\right)$$
$$=\frac{2}{(1-\omega^2)\pi}\cos\frac{\omega\pi}{2}$$

$$\therefore\quad f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{1}{1-\omega^2}\cos\frac{\omega\pi}{2}\cos\omega x\,d\omega$$

(2) 當 $x=0$ 時，

$$f(0)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{1}{1-\omega^2}\cos\frac{\omega\pi}{2}\,d\omega\quad\Rightarrow\int_{0}^{\infty}\frac{1}{1-\omega^2}\cos\frac{\omega\pi}{2}\,d\omega=\frac{\pi}{2}$$

5. 已知函數 $f(x)=e^{-|x|}$ **與** $g(x)=H(x+1)-H(x-1)$**，其中** $H(x)$ **為單位步階函數，其定義為** $H(x)=\begin{cases}1, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$

(1) 試求： $f(x)$ **之傅立葉轉換** $F(\omega)=?$ **(5%)**

(2) 試求： $g(x)$ **之傅立葉轉換** $G(\omega)=?$ **(5%)**

(3) 試求： $\int_{\infty}^{-\infty}\frac{\sin^2\omega}{\omega^2}d\omega=?$ **(5%)**

(4) 取 $q(x)=f(x)*g(x)$**，試問：** $q(x)=?$ **(5%)**

(hint：分 $x<-1$**，** $-1<x<1$**，** $1<x$ **討論)**

(5) $Q(\omega)=\mathcal{F}[q(x)]=?$ **(5%)**

(1) $\because f(x)=e^{-|x|}$ 為偶函數

$$\mathcal{F}[f(x)]=F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}e^{-i\omega x}\,dx$$
$$=2\int_{0}^{\infty} e^{-x}\cos\omega x\,dx$$
$$\therefore\quad=\frac{2}{1+\omega^2}(-e^{-x}\cos\omega x+\omega e^{-x}\sin\omega x)\Big|_0^{\infty}$$
$$=\frac{2}{1+\omega^2}$$

(2) $\because\ g(x)=H(x+1)-H(x-1)$ 為偶函數

$$\mathcal{F}[g(x)]=G(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}[H(x+1)-H(x-1)]e^{-i\omega x}\,dx$$
$$=2\int_0^1 \cos\omega x\ dx$$
$$=\frac{2}{\omega}\sin\omega$$

(3) **傅立葉轉換的 Parseval 恆等式可得**

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|H(x+1)-H(x-1)\right|^2 dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{2}{\omega}\sin\omega\right|^2 d\omega$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1}\ dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{4}{\omega^2}\sin^2\omega\,d\omega$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2\omega}{\omega^2}d\omega=\pi$$

(4) $q(x)=f*g=\int_{-\infty}^{\infty} f(x-\tau)g(\tau)\,d\tau$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-\tau|}[H(\tau+1)-H(\tau-1)]\,d\tau$$
$$=\int_{-1}^{1} e^{-|x-\tau|}\,d\tau$$

當 $x>1$ 時 $q(x)=\int_{-1}^{1} e^{-|x-\tau|}\,d\tau=\int_{-1}^{1} e^{-x+\tau}\,d\tau=e^{-x+1}-e^{-x-1}$

當 $x<1$ 時 $q(x)=\int_{-1}^{1} e^{-|x-\tau|}\,d\tau=\int_{-1}^{1} e^{x-\tau}\,d\tau=-e^{x-1}+e^{x+1}$

當 $-1<x<1$ 時

$$q(x)=\int_{-1}^{1} e^{-|x-\tau|}\,d\tau=\int_{-1}^{x} e^{-x+\tau}\,d\tau+\int_{x}^{1} e^{x-\tau}\,d\tau$$
$$=(1-e^{-x-1})-(e^{x-1}-1)$$
$$=2-e^{-x-1}-e^{x-1}$$

(5) $Q(\omega)=\mathcal{F}[q(x)]=F(\omega)G(\omega)=\dfrac{2}{1+\omega^2}\cdot\dfrac{2}{\omega}\sin\omega x=\dfrac{4}{\omega(1+\omega^2)}\sin\omega$

6. (1) 已知 $f(x)=\delta(x)$，試求此函數之傅立葉轉換 $F(\omega)=?$ **(5%)**

(2) 函數 $g(x)=e^{-ax}\cdot H(x)$ 且 $a>0$，試求此函數之傅立葉轉換 $G(\omega)=?$ **(5%)**

(3) 試將此微分方程 $\dfrac{du(x)}{dx}+2u(x)=\delta(x)$ 作傅立葉轉換並求出 $U(\omega)=?$ **(5%)**

(4) 試問 $u(x)=\mathcal{F}^{-1}[U(\omega)]=?$ **(5%)**

(1) $\mathcal{F}[f(x)]=F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)e^{-i\omega x}\,dx=e^{-i\omega 0}=1$

(2) $\mathcal{F}[g(x)]=G(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax}\cdot H(x)e^{-i\omega x}\,dx$

$$=\int_{0}^{\infty}e^{-(a+i\omega)x}\,dx$$

$$=-\frac{1}{a+i\omega}e^{-(a+i\omega)x}\Big|_0^{\infty}$$

$$=\frac{1}{a+i\omega}$$

(3) $\mathcal{F}[\dfrac{du(x)}{dx}+2u(x)]=\mathcal{F}[\delta(x)]$

$\Rightarrow i\omega U(\omega)+2U(\omega)=1$

$\Rightarrow U(\omega)=\dfrac{1}{i\omega+2}$

(4) 由(2)的結果可知

$$u(x)=\mathcal{F}^{-1}[U(\omega)]=\mathcal{F}^{-1}[\frac{1}{i\omega+2}]=e^{-2x}\cdot H(x)$$