國立臺灣海洋大學河海工程學系 2016 工程數學(二) 第二次大考

系級：________　　學號：________　　姓名：________

1. 已知在 $-\pi \le x \le \pi$ **上，** $f(x)=|x|$ **，試問:**

(1) $f(x)$ **的傅立葉級數展開為何? (5%)**

(2) $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=?$ **(5%)**

(3) $\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\cdots=?$ **(5%)**

2. 已知 $f(x)=\frac{3}{2}(x+2)$ **就其在區間** $(0,2)$ **之部分，全幅展開得** $g(x)$ **，半幅正弦展開得** $G(x)$**，半幅餘弦展開得** $F(x)$**，試問:** $g(-1)$、$F(6)$、$F(-1)$、$G(6)$ **與** $G(-5)$ **之值。 (15%)**

3. 已知函數 $f(x)=3\sin x-4(1+\sin x)\cos^2 x$ **，試求其複數形式的傅立葉級數。 (10%)**

4. 已知函數 $f(x)=\begin{cases}\cos x, & |x|<\frac{\pi}{2}\\ 0, & |x|>\frac{\pi}{2}\end{cases}$ **，試求:**

(1) $f(x)$ **的傅立葉積分 (10%)**

(2) 請計算 $\int_0^{\infty}\frac{1}{1-\omega^2}\cos\frac{\pi\omega}{2}d\omega$ **之值。 (5%)**

5. 已知函數 $f(x)=e^{-|x|}$ **與** $g(x)=H(x+1)-H(x-1)$**，其中** $H(x)$ **為單位步階函數，其定義為** $H(x)=\begin{cases}1, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$

(1) 試求： $f(x)$ **之傅立葉轉換** $F(\omega)=?$ **(5%)**

(2) 試求： $g(x)$ **之傅立葉轉換** $G(\omega)=?$ **(5%)**

(3) 試求： $\int_{\infty}^{-\infty}\frac{\sin^2\omega}{\omega^2}d\omega=?$ **(5%)**

(4) 取 $q(x)=f(x)*g(x)$ **，試問：** $q(x)=?$ **(5%)**

(hint : 分 $x<-1$**，** $-1<x<1$**，** $1<x$ **討論)**

(5) $Q(\omega)=\mathcal{F}[q(x)]=?$ **(5%)**

6. (1) 已知 $f(x)=\delta(x)$ **，試求此函數之傅立葉轉換** $F(\omega)=?$ **(5%)**

(2) 函數 $g(x)=e^{-ax}\cdot H(x)$ **且** $a>0$ **，試求此函數之傅立葉轉換** $G(\omega)=?$ **(5%)**

(3) 試將此微分方程 $\frac{du(x)}{dx}+2u(x)=\delta(x)$ **作傅立葉轉換並求出** $U(\omega)=?$ **(5%)**

(4) 試問 $u(x)=\mathcal{F}^{-1}[U(\omega)]=?$ **(5%)**

傅立葉級數展開

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{2n\pi x}{T}+b_n\sin\frac{2n\pi x}{T})$$

$$a_0=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)\,dx\text{，}\ a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)\cos\frac{2n\pi x}{T}dx\text{，}\ b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)\sin\frac{2n\pi x}{T}dx$$

傅立葉級數之 Parseval 恆等式： $\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f^2(x)\,dx=a_0^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$

傅立葉積分

$$f(x)=\int_0^{\infty}[A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x]\,d\omega$$

其中 $A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos\omega x\,dx$，$B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin\omega x\,dx$

傅立葉複數形式級數展開

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n e^{i\omega_n x}\text{，}\quad \text{其中 } \omega_n=\frac{2n\pi}{T}\text{，}\ c_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)e^{-i\omega_n x}\,dx$$

傅立葉轉換： $F(\omega)=\mathcal{F}[f(x)]=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}\,dx$

傅立葉反轉換： $f(x)=\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega x}\,d\omega$

傅立葉轉換的 Parseval 恆等式： $\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(x)\right|^2dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|F(\omega)\right|^2d\omega$

Convolution： $f*g=\int_{-\infty}^{\infty}f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$

$$\mathcal{F}[f'(t)]=i\omega F(\omega)\Rightarrow\mathcal{F}[f^{(n)}(t)]=(i\omega)^n F(\omega)$$

$$\mathcal{F}[t^n f(t)]=i^n\frac{d^n}{d\omega^n}F(\omega)\Rightarrow\mathcal{F}[f^{(n)}(t)]=(i\omega)^n F(\omega)$$

$$\int_a^b f(x)\delta(x-x_0)\,dx=f(x_0)\quad\text{其中}\quad a<x_0<b$$

尤拉公式： $\cos x=\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})$

$$\sin x=\frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix})$$

積化和差：

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]\text{，}\ \sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$$