國立臺灣海洋大學河海工程學系 2016 工程數學(二) 第一次大考參考解答

系級：＿＿＿＿＿＿＿　　學號：＿＿＿＿＿＿　　姓名：＿＿＿＿＿＿

1. 試求以 $(-1,0,1)$、$(2,-1,4)$、$(2,1,5)$、$(-2,1,4)$ **為頂點之四面體體積。 (10%)**

2. 已知某山脈高度分佈為 $h(x,y)=10(2xy-3x^2-4y^2-18x+28y+12)$ **，試問:**

(1) 山頂位置。 (5%)

(2) 山頂高度。 (3%)

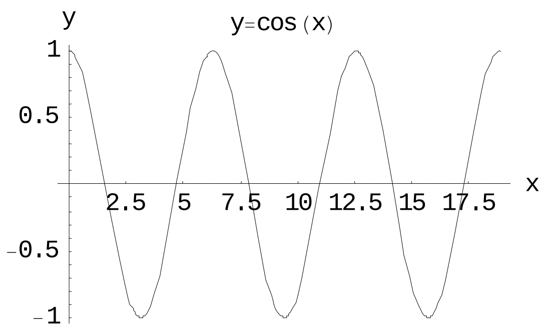
(3) 位置 $(1,1)$ **之最陡坡度與方向。 (6%)**

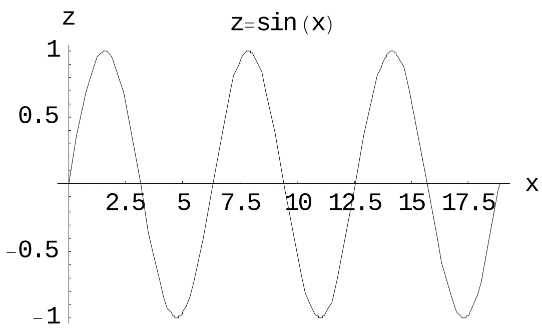
(4) 請計算 $\nabla\cdot\nabla h$ **與** $\nabla\times\nabla h$ **之值。 (6%)**

3. 試計算線積分 $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ **，其中路徑 *C* 為由** $(5,4)\to(1,3)\to(0,1)\to(5,1)$ **之三條直線所組成。**

(1) $\vec{F}=6x^2\,\vec{i}-2x\,\vec{j}$ **(10%)**　**(2)** $\vec{F}=6x^2\,\vec{i}-2y\,\vec{j}$ **(10%)**

4. 已知一曲線之位置向量為 $\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$ **。若一 3 維曲線投影於 *x-y* 平面及 *x-z* 如圖所示，試以** $x(t)=t$ **作為參數，求此曲線之單位切向量、單位法向量與曲率** κ **。 (15%)**





5. 請參考下圖，並回答下列各題：

其中，$\vec{F}=(x+y)\vec{i}+(2x-z)\vec{j}+(y-z)\vec{k}$，$S=S_1+S_2+S_3+S_4$，

$$\Gamma=\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3$$

(1) $\vec{F}$ **是否為保守場? 請說明之。 (5%)**

(2) $\vec{n}_4$ **為斜面 S_4 上的單位法向量，試問:** $\vec{n}_4=?$ **(5%)**

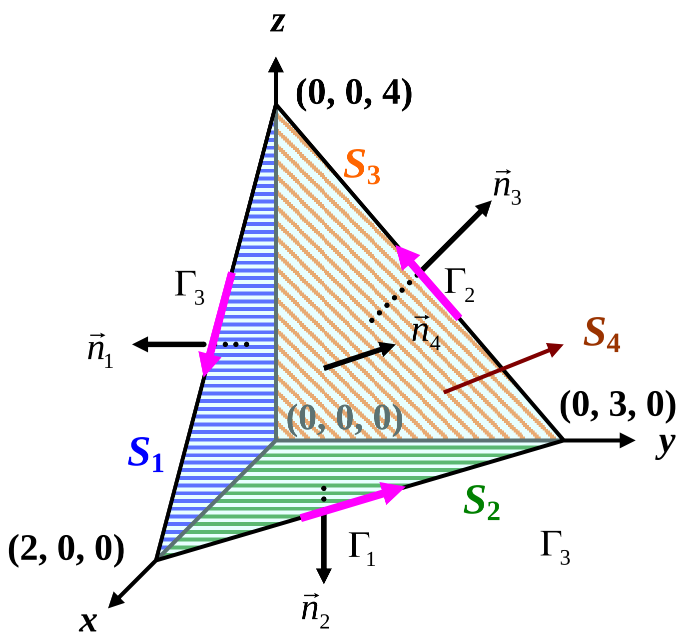
(3) 斜面 S_4 的面積為何? (5%)

(4) $\oiint \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS=?$ **(5%)**

(5) 請使用線積分計算 $\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = ?$ **(5%)**

(6) 請計算 $\iint_{S_1+S_2+S_3} (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n}\, dA = ?$ **(5%)**

(7) 請計算 $\iint_{S_4} (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n}\, dA = ?$ **(5%)**



Hint:

Gauss 散度定理: $\iiint \nabla \cdot \vec{F}\, dV = \oiint \vec{F} \cdot \vec{n}\, dA$ **(3D)**

$\iint \nabla \cdot \vec{F}\, dA = \oint \vec{F} \cdot \vec{n}\, ds$ **(2D)**

格林定理: $\int P\,dx + Q\,dy = \int (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\, dxdy$

Stokes 旋度定理: $\iint (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n}\, dA = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r}$

曲率：以弧長參數 s 表示，單位切向量變化率的大小，即 $\kappa = \left|\frac{d\vec{T}}{ds}\right|$。

扭率：$\tau = \left|\frac{d(\vec{T}(s) \times \vec{N}(s))}{ds}\right|$

參考解答:

1. 試求以 $(-1, 0, 1)$ **、** $(2, -1, 4)$ **、** $(2, 1, 5)$ **、** $(-2, 1, 4)$ **為頂點之四面體體積。 (10%)**

$\vec{A} = (2, -1, 4) - (-1, 0, 1) = (3, -1, 3)$

$\vec{B} = (2, 1, 5) - (-1, 0, 1) = (3, 1, 4)$

$\vec{C} = (-2, 1, 4) - (-1, 0, 1) = (-1, 1, 3)$

四面體體積$= \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{22}{6} = \frac{11}{3}$

2. 已知某山脈高度分佈為 $h(x, y) = 10(2xy - 3x^2 - 4y^2 - 18x + 28y + 12)$ **,試問:**

(1) 山頂位置。 (5%)

(2) 山頂高度。 (3%)

(3) 位置 $(1, 1)$ **之最陡坡度與方向。 (6%)**

(4) 請計算 $\nabla \cdot \nabla h$ **與** $\nabla \times \nabla h$ **之值。 (6%)**

(1) 最高點: $\frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow 10(2y - 6x - 18) = 0$

$\frac{\partial h}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow 10(2x - 8y + 28) = 0$

解聯立可得 $x = -2$, $y = 3$

(2) $h(-2, 3) = 10(-12 - 12 - 36 + 36 + 84 + 12) = 720$

(3) $\nabla h = \frac{\partial h}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial h}{\partial y} \vec{j} = 10(2y - 6x - 18)\ \vec{i} + 10(2x - 8y + 28)\ \vec{j}$

在位置 $(1, 1)$,$\nabla h = -220\ \vec{i} + 220\ \vec{j}$

$\therefore$ 最陡方向為 $-\vec{i} + \vec{j}$,最陡坡度為 $|\nabla h| = 220\sqrt{2}$

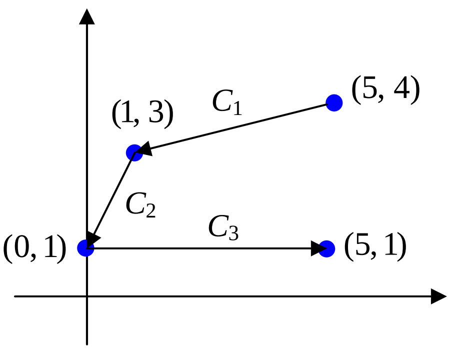
(4) $\nabla \cdot \nabla h = \frac{\partial(10(2y - 6x - 18))}{\partial x} + \frac{\partial(10(2x - 8y + 28))}{\partial y} = -140$

$$\nabla \times \nabla h = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 10(2y - 6x - 18) & 10(2x - 8y + 28) & 0 \end{vmatrix} = 0$$

3. **試計算線積分** $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ **，其中路徑** $\boldsymbol{C}$ **為由** $(5,4)\to(1,3)\to(0,1)\to(5,1)$ **之三條直線所組成。**

(1) $\vec{F}=6x^2\,\vec{i}-2x\,\vec{j}$ (10%) **(2)** $\vec{F}=6x^2\,\vec{i}-2y\,\vec{j}$ (10%)

(1)



$$\nabla\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 6x^2 & -2x & 0\end{vmatrix}=-2\vec{k} \quad\Rightarrow\quad \text{此為非保守場}$$

又 $\vec{F}=6x^2\,\vec{i}-2x\,\vec{j}$ 且 $d\vec{r}=dx\,\vec{i}+dy\,\vec{j}$ $\Rightarrow$ $\int_c \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_c 6x^2\,dx-2x\,dy$

C_1: $(5,4)\to(1,3)\Rightarrow y=\dfrac{1}{4}(x-5)+4 \quad\Rightarrow dy=\dfrac{1}{4}dx$

$$\int_{C_1}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_{C_1}6x^2\,dx-2x\,dy=\int_5^1\left(6x^2-\frac{x}{2}\right)dx=-242$$

C_2: $(1,3)\to(0,1)\Rightarrow y=2x+1 \quad\Rightarrow dy=2dx$

$$\int_{C_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_{C_2}6x^2\,dx-2x\,dy=\int_1^0(6x^2-4x)\,dx=0$$

C_3: $(0,1)\to(5,1)\Rightarrow y=1 \quad\Rightarrow dy=0dx$

$$\int_{C_3}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_{C_3}6x^2\,dx-2x\,dy=\int_0^5 6x^2\,dx=250$$

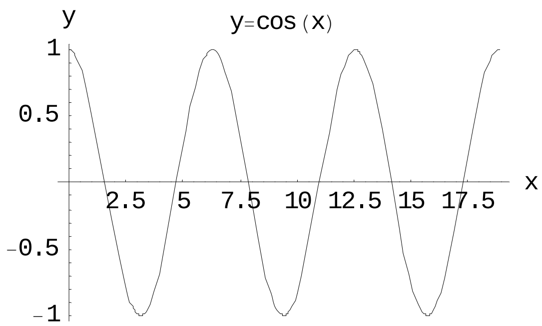
$$\therefore\ \int_C\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_{C_1+C_2+C_3}\vec{F}\cdot d\vec{r}=8$$

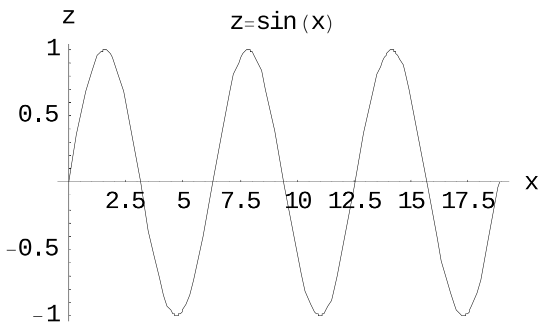
(2) $\because$ $\nabla\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 6x^2 & -2y & 0\end{vmatrix}=0$

$\therefore$ 此為保守場，僅與起始點和終點有關

$$\int_c\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_c 6x^2\,dx-2y\,dy=(2x^3-y^2)\Big|_{(5,4)}^{(5,1)}=15$$

4. **已知一曲線之位置向量為** $\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$ **。若一 3 維曲線投影於** ***x-y*** **平面及** ***x-z*** **如圖所示，試以** $x(t)=t$ **作為參數，求此曲線之單位切向量、單位法向量與曲率** κ **。 (15%)**





$x=t$， $y=\cos x=\cos t$， $z=\sin x=\sin t$

$\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}=t\,\vec{i}+\cos t\,\vec{j}+\sin t\,\vec{k}$

$\Rightarrow \vec{r}\,'(t)=\vec{i}-\sin t\,\vec{j}+\cos t\,\vec{k}$

單位切向量 $\vec{t}(t)=\dfrac{t\,\vec{i}-\sin t\,\vec{j}+\cos t\,\vec{k}}{\left|t\,\vec{i}-\sin t\,\vec{j}+\cos t\,\vec{k}\right|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i}-\sin t\,\vec{j}+\cos t\,\vec{k})$

法向量 $\vec{t}\,'(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(-\cos t\,\vec{j}-\sin t\,\vec{k})$

單位法向量 $\vec{n}(t)=-\cos t\,\vec{j}-\sin t\,\vec{k}$

曲率 $\kappa=\left|\dfrac{\vec{t}\,'}{\vec{r}\,'(t)}\right|=\dfrac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$

or $d\vec{r}(t)=dx\,\vec{i}+dy\,\vec{j}+dz\,\vec{k}$

$\therefore\ ds=\left|d\vec{r}(t)\right|=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2}=\sqrt{(\dfrac{dx}{dt})^2+(\dfrac{dy}{dt})^2+(\dfrac{dz}{dt})^2}\ dt=\sqrt{2}\ dt$

$\Rightarrow s=\sqrt{2}\ t \quad \Rightarrow t=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ s$

$\vec{R}(s)=\vec{r}(t(s))=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ s\,\vec{i}+\cos(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ s)\,\vec{j}+\sin(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ s)\,\vec{k}$

$\vec{T}(s)=\dfrac{\vec{R}(s)}{ds}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{i}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ s)\,\vec{j}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ s)\,\vec{k}$

$\kappa=\left|\dfrac{d\vec{T}}{ds}\right|=\left|-\dfrac{1}{2}\cos(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ s)\,\vec{j}-\dfrac{1}{2}\sin(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ s)\,\vec{k}\right|=\dfrac{1}{2}$

5. 請參考下圖，並回答下列各題：

其中，$\vec{F}=(x+y)\vec{i}+(2x-z)\vec{j}+(y-z)\vec{k}$，$S=S_1+S_2+S_3+S_4$，

$\Gamma=\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3$

(1) $\vec{F}$ **是否為保守場？請說明之。 (5%)**

(2) $\vec{n}_4$ **為斜面** S_4 **上的單位法向量，試問：** $\vec{n}_4=?$ **(5%)**

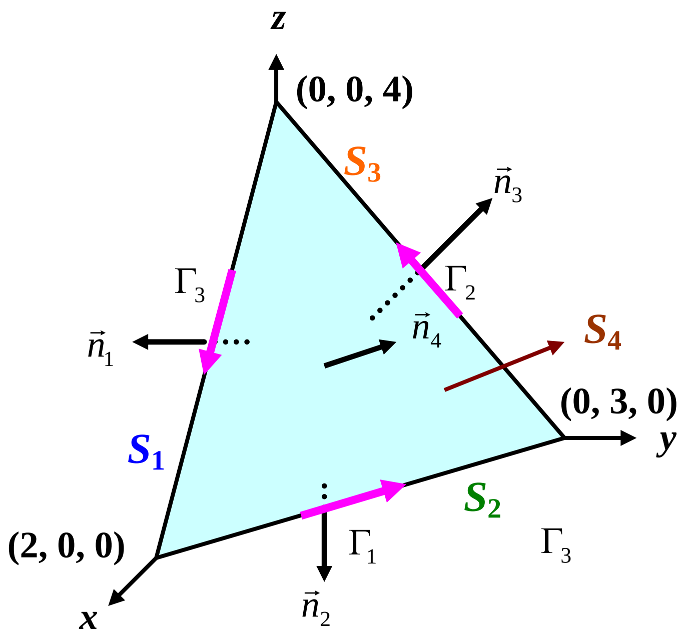
(3) 斜面 S_4 **的面積為何？(5%)**

(4) $\oiint \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS=?$ **(5%)**

(5) 請使用線積分計算 $\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}=?$ **(5%)**

(6) 請計算 $\iint_{S_1+S_2+S_3}(\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}\,dA=?$ **(5%)**

(7) 請計算 $\iint_{S_4}(\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}\,dA=?$ **(5%)**



(1) $\nabla\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x+y & 2x-z & y-z\end{vmatrix}=2\vec{i}+\vec{k}$ $\Rightarrow$ 此為非保守場

(2) $\vec{a}=(0,3,0)-(2,0,0)=(-2,3,0)$

$\vec{b}=(0,0,4)-(2,0,0)=(-2,0,4)$

$\vec{a}\times\vec{b}=(0,3,0)-(2,0,0)=(12,8,6)$

$$\vec{n}_4 = \frac{\vec{a}\times\vec{b}}{\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|} = \frac{(12, 8, 6)}{\sqrt{12^2+8^2+6^2}} = \frac{1}{\sqrt{61}}(6, 4, 3)$$

(3) 斜面 S_4 的面積$=\frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \sqrt{61}$

(4) 由 Gauss 散度定理: $\oiint \vec{F}\cdot\vec{n}\ dS = \iiint \nabla\cdot\vec{F}\ dV = \iiint 0\ dV = 0$

(5) Γ_1 : $3x+2y=6 \quad \Rightarrow y = 3-\frac{3}{2}x \quad \Rightarrow dy = -\frac{3}{2}dx \quad (z=0)$

Γ_2 : $4y+3z=12 \quad \Rightarrow z = 4-\frac{4}{3}y \quad \Rightarrow dz = -\frac{4}{3}dy \quad (x=0)$

Γ_3 : $2x+z=4 \quad \Rightarrow z = 4-2x \quad \Rightarrow dz = -2dx \quad (y=0)$

$$\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{\Gamma_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{\Gamma_3} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$= \int_{\Gamma_1} (x+y)dx + (2x-z)dy + \int_{\Gamma_2} (2x-z)dy + (y-z)dz$$

$$+ \int_{\Gamma_3} (x+y)dx + (y-z)dz$$

$$= \int_2^0 (-\frac{7}{2}x+3)dx + \int_3^0 (\frac{4}{3}-\frac{16}{9}y)dy + \int_0^2 (8-3x)dx$$

$$= 15$$

(6) 由 Stokes 旋度定理: $\iint_{S_1+S_2+S_3} (\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}\ dA = -\oint_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = -15$

(7) 由 Stokes 旋度定理: $\iint_{S_4} (\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}\ dA = \oint_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = 15$