國立臺灣海洋大學河海工程學系 2016 工程數學(二) 第一次大考

系級：________________ 學號：______________ 姓名：_____________

1. 試求以 $(-1,0,1)$、$(2,-1,4)$、$(2,1,5)$、$(-2,1,4)$ 為頂點之四面體體積。 (10%)

2. 已知某山脈高度分佈為 $h(x,y)=10(2xy-3x^2-4y^2-18x+28y+12)$，試問:

(1) 山頂位置。 (5%)

(2) 山頂高度。 (3%)

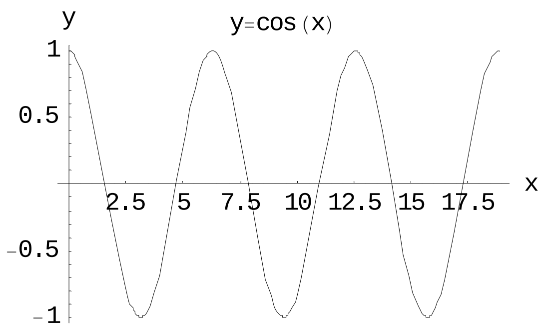
(3) 位置 $(1,1)$ 之最陡坡度與方向。 (6%)

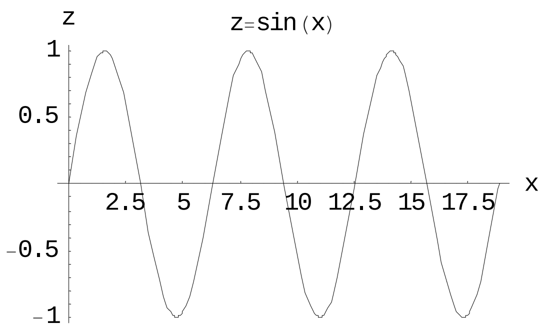
(4) 請計算 $\nabla\cdot\nabla h$ 與 $\nabla\times\nabla h$ 之值。 (6%)

3. 試計算線積分 $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$，其中路徑 C 為由 $(5,4)\to(1,3)\to(0,1)\to(5,1)$ 之三條直線所組成。

(1) $\vec{F}=6x^2\,\vec{i}-2x\,\vec{j}$ **(10%)** **(2)** $\vec{F}=6x^2\,\vec{i}-2y\,\vec{j}$ **(10%)**

4. 已知一曲線之位置向量為 $\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$。若一 3 維曲線投影於 *x-y* 平面及 *x-z* 如圖所示，試以 $x(t)=t$ 作為參數，求此曲線之單位切向量、單位法向量與曲率 κ。 (15%)





5. 請參考下圖，並回答下列各題：

其中，$\vec{F}=(x+y)\vec{i}+(2x-z)\vec{j}+(y-z)\vec{k}$，$S=S_1+S_2+S_3+S_4$，

$$\Gamma=\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3$$

(1) $\vec{F}$ **是否為保守場? 請說明之。 (5%)**

(2) $\vec{n}_4$ **為斜面 S_4 上的單位法向量，試問:** $\vec{n}_4=?$ **(5%)**

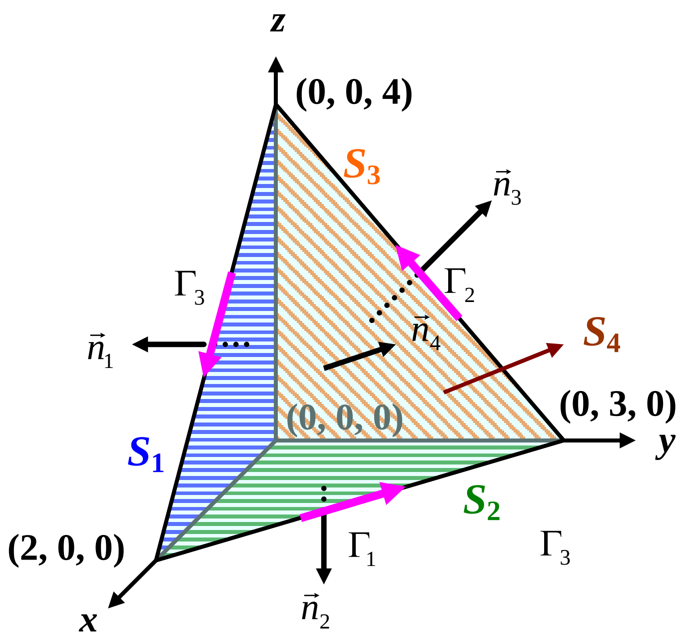
(3) 斜面 S_4 的面積為何? (5%)

(4) $\oiint \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS=?$ **(5%)**

(5) 請使用線積分計算 $\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = ?$ **(5%)**

(6) 請計算 $\iint_{S_1+S_2+S_3} (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n}\, dA = ?$ **(5%)**

(7) 請計算 $\iint_{S_4} (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n}\, dA = ?$ **(5%)**



Hint:

Gauss 散度定理: $\iiint \nabla \cdot \vec{F}\, dV = \oiint \vec{F} \cdot \vec{n}\, dA$ **(3D)**

$\iint \nabla \cdot \vec{F}\, dA = \oint \vec{F} \cdot \vec{n}\, ds$ **(2D)**

格林定理: $\int P\,dx + Q\,dy = \int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$

Stokes 旋度定理: $\iint (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n}\, dA = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r}$

曲率: 以弧長參數 *s* 表示，單位切向量變化率的大小，即 $\kappa = \left|\frac{d\vec{T}}{ds}\right|$ 。