國立臺灣海洋大學河海工程學系 2015 工程數學(一) 第三次隨堂測驗參考解答

系級：＿＿＿＿＿＿＿ 學號：＿＿＿＿＿＿ 姓名：＿＿＿＿＿＿

1. 試求 Clairaut ODE $y = xy' - \frac{1}{4}(y')^2$ 之通解與奇解。

令 $p = y'$ $\Rightarrow y = xp - \frac{1}{4}p^2$ ……..(a)

兩邊對 x 微分可得 $y' = p + xp' - \frac{1}{2}p \cdot p'$

$$\Rightarrow p = p + xp' - \frac{1}{2}p \cdot p'$$

$$\Rightarrow p'(x - \frac{1}{2}p) = 0$$

當 $p' = 0$ $\Rightarrow p = c$ 代回(a)可得 $y = xc - \frac{1}{4}c^2$ (通解)

當 $x - \frac{1}{2}p = 0$ $\Rightarrow p = 2x$ 代回(a)可得 $y = x^2$ (奇解)

2. 給微分方程式 $y'' + 6y' + 9y = 0$ 並已知一補解為 $y_1 = e^{-3x}$，試求出另一補解 $y_2 = ?$

已知一解為 $y_1 = e^{-3x}$

由 $W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_1' y_2$ 且滿足 $W' + 6W = 0$

可得 $W = ke^{-\int 6dx} = ke^{-6x}$ $\Rightarrow y_1 y_2' - y_1' y_2 = c_1 e^{-6x}$

$$\Rightarrow y_2' - \frac{y_1'}{y_1} y_2 = \frac{c_1}{y_1} e^{-6x}$$

$$\Rightarrow y_2' + 3y_2 = c_1 e^{-3x}$$

可知積分因子為 $\mu = e^{\int 3dx} = e^{3x}$

同乘積分因子可得 $e^{3x} y_2' + 3e^{3x} y_2 = c_1$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(e^{3x} y_2) = c_1$$

$$\Rightarrow e^{3x} y_2 = c_1 x + c_2$$

$$\Rightarrow y_2 = c_1 x \cdot e^{-3x} + c_2 e^{-3x}$$

所以可知另一補解為 $x \cdot e^{-3x}$