國立臺灣海洋大學河海工程學系 2015 工程數學(一) 第二次大考參考解答

系級：________________ 學號：______________ 姓名：_____________

1. 已知 x 、 $x+1$ 與 $x-e^{-x}$ 為下述線性微分方程的 3 個解

$$y''(x)+a(x)\cdot y'(x)+b(x)\cdot y(x)=f(x)$$

   (1) 試求 $a(x)$ 、 $b(x)$ 與 $f(x)$ 為何? (9%)

   (2) 試求此微分方程之通解。 (6%)

2. 試求下述微分方程之通解

   (1) $y''+2y'+5y=3\sin x+\cos x$ (10%)

   (2) $x(x+1)y''+(4x+1)y'+2y=2x+1$ 。 (10%)

3. 已知一微分方程式 $x^3y'''-3x^2y''+7xy'-8y=x^2$

   (1) 試求此微分方程的補解 $y_h(x)=$? (7%)

   (2) 以變數變換，令 $t=\ln x$ ，則 $y(x)=Y(t)$ ，試求轉換後以 $Y(t)$ 表示的微分方程式。 (7%)

   (3) 試求轉換後微分方程的補解 $Y_h(t)=$? (6%)

   (4) 試求轉換後微分方程的特解 $Y_p(t)=$? (6%)

   (5) 試將 $Y(t)$ 轉換回 $y(x)$ 。 (4%)

4. 給一微分方程 $\ddot{y}(t)+\omega^2y(t)=F\cos\gamma t$ ，其中 F 為常數且 $\gamma\neq\omega$

   (1) 試求此微分方程之補解 $y_h(t)=$? (6%)

   (2) 試求 Wronskian，即 $W(y_1,y_2)=$? (4%)

   (3) 試求微分方程之通解 $y(t)=$? (5%)

   (4) 若給初始條件 $y(0)=0$ 與 $\dot{y}(0)=0$ ，則 $y(t)=$? (5%)

   (5) 當 $\gamma=\omega$ 時，則 $\lim_{\gamma\to\omega}y(t)=$? (5%)

5. 已知微分方程式 $xy''-(x+1)y'+y=0$

   (1) 試以 $y_1=e^{\lambda x}$ 求一補解。 (3%)

   (2) 試求另一補解。 (7%)

參考解答:

1. 已知 x 、 $x+1$ 與 $x-e^{-x}$ 為下述線性微分方程的 3 個解

$$y''(x)+a(x)\cdot y'(x)+b(x)\cdot y(x)=f(x)$$

(1) 試求 $a(x)$ 、 $b(x)$ 與 $f(x)$ 為何? (9%)

(2) 試求此微分方程之通解。 (6%)

1. (1) $\because$ x 、 $x+1$ 與 $x-e^{-x}$ 為微分方程的 3 個解

$\therefore$ 分別將 $y=x$ 、 $x+1$ 、 $x-e^{-x}$ 代入 ODE 可得

$0+a+bx=f \quad \ldots\ldots(1)$

$0+a+b(x+1)=f \quad \ldots\ldots(2)$

$-e^{-x}+a(1+e^{-x})+b(x-e^{-x})=f \quad \ldots\ldots(3)$

由(2)-(1)可得 $b=0$ 代回 (1) 可知 $a=f$ 代入 (3)

可得 $a=f=1$

所以可知此微分方程為 $y''(x)+y'(x)=1$

(2) $\because$ 此為常係數 ODE

$\therefore$ 令 $y=e^{\lambda x}$ 代入 ODE 可得

$\lambda^2+\lambda=0 \quad \Rightarrow \lambda=0 \text{ or } -1$

$$\Rightarrow y_h=c_3+c_2e^{-x}$$

使用參數變異法來求其特解

令其特解 $y_p(x)=u_1+u_2e^{-x}$ 代回 ODE 後可得

$$u_1'=\frac{\begin{vmatrix}0 & e^{-x}\\ 1 & -e^{-x}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & e^{-x}\\ 0 & -e^{-x}\end{vmatrix}}=\frac{-e^{-x}}{-e^{-x}}=1 \quad \Rightarrow u_1=\int 1\,dx=x$$

$$u_2'=\frac{\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & e^{-x}\\ 0 & -e^{-x}\end{vmatrix}}=\frac{1}{-e^{-x}}=-e^{x} \quad \Rightarrow u_2=-\int e^{x}\,dx=-e^{x}$$

$\therefore \quad y_p(x)=u_1+u_2e^{-x}=x-1$

通解 $y=y_h(x)+y_p(x)=c_3+c_2e^{-x}+x-1=c_1+c_2e^{-x}+x$

2. 試求下述微分方程之通解

(1) $y''+2y'+5y=3\sin x+\cos x$ (10%)

(2) $x(x+1)y''+(4x+1)y'+2y=2x+1$。 (10%)

(1) 求補解

$\because$ 此為常係數 ODE

$\therefore$ 令 $y=e^{\lambda x}$ 代入 ODE 可得

$$(\lambda^2+2\lambda+5)e^{\lambda x}=0$$

$$\Rightarrow \lambda^2+2\lambda+5=0$$

$$\Rightarrow \lambda=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot1\cdot5}}{2}=-1\pm2i$$

$$\therefore\quad y_h=e^{-x}(c_1\cos2x+c_2\sin2x)$$

由待定係數法求特解，令 $y_p=A\cos x+B\sin x$ 代入 ODE 可得

$$-(A\cos x+B\sin x)+2(-A\sin x+B\cos x)+5(A\cos x+B\sin x)=3\sin x+\cos x$$

$$\Rightarrow (4A+2B)\cos x+(-2A+4B)\sin x=3\sin x+\cos x$$

$$\therefore\quad 4A+2B=1$$

$$-2A+4B=3$$

$$\Rightarrow A=-\frac{1}{10},\ B=\frac{7}{10}$$

$$\therefore\quad y_p=-\frac{1}{10}\cos x+\frac{7}{10}\sin x$$

$$y=y_h+y_p=e^{-x}(c_1\cos2x+c_2\sin2x)-\frac{1}{10}\cos x+\frac{7}{10}\sin x$$

(2) $x(x+1)y''+(4x+1)y'+2y=2x+1$

令 $a_2=x(x+1)$，$a_1=4x+1$，$a_0=2$

由判斷式：$a_2''-a_1'+a_0=2-4+2=0$ 可知此為正合式

$$x(x+1)y''+(4x+1)y'+2y=\frac{d}{dx}[b_1(x)y'+b_0(x)y]$$

$$\Rightarrow b_1(x)y''+[b_1'(x)+b_0(x)]+b_0'(x)y=x(x+1)y''+(4x+1)y'+2y$$

$$\therefore\quad b_1=x(x+1),\ b_0=-b_1'+(4x+1)=-2x-1+4x+1=2x$$

$$\therefore\quad x(x+1)y''+(4x+1)y'+2y=\frac{d}{dx}[x(x+1)y'+2xy]=2x+1$$

$$\Rightarrow\quad x(x+1)y'+2xy=x^2+x+c_1$$

$$\Rightarrow\quad y'+\frac{2}{x+1}y=c_1\frac{1}{x(x+1)}+1$$ 此為一階線性 ODE

積分因子：$\mu=e^{\int\frac{2}{x+1}dx}=e^{2\ln|x+1|}=(x+1)^2$

同乘積分因子: $(x+1)^2 y' + 2(x+1)y = c_1 \frac{x+1}{x} + (x+1)^2$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}[(x+1)^2 y] = c_1 \frac{x+1}{x} + (x+1)^2$$

$$\Rightarrow (x+1)^2 y = c_1(x + \ln x) + \frac{1}{3}(x+1)^3 + c_2$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{(x+1)^2}[c_1(x+\ln x) + c_2] + \frac{1}{3}(x+1)$$

3. 已知一微分方程式 $x^3 y''' - 3x^2 y'' + 7xy' - 8y = x^2$
   (1) 試求此微分方程的補解 $y_h(x) = ?$ (7%)
   (2) 以變數變換，令 $t = \ln x$，則 $y(x) = Y(t)$，試求轉換後以 $Y(t)$ 表示的微分方程式。 (7%)
   (3) 試求轉換後微分方程的補解 $Y_h(t) = ?$ (6%)
   (4) 試求轉換後微分方程的特解 $Y_p(t) = ?$ (6%)
   (5) 試將 $Y(t)$ 轉換回 $y(x)$。 (4%)

(1) 此為尤拉微分方程式，所以令 $y = x^m$ 代入 ODE 可得

$$m(m-1)(m-2)x^m - 3m(m-1)x^m + 7mx^m - 8x^m = 0$$

$$\Rightarrow m^3 - 3m^2 + 2m - 3m^2 + 3m + 7m - 8 = 0$$

$$\Rightarrow m^3 - 6m^2 + 12m - 8 = 0$$

$$\Rightarrow (m-2)^3 = 0$$

$\Rightarrow m = 2, 2, 2$ (三重根)

$$\therefore \quad y_h = c_1 x^2 + c_2 x^2 \cdot \ln x + c_3 x^2 \cdot (\ln x)^2$$

(2) 令 $t = \ln x \quad \Rightarrow x = e^t$

$$\therefore y(x) = y(e^t) = Y(t)$$

$$y'(x) = \frac{dy(x)}{dx} = \frac{dY(t)}{dx} = \frac{dt}{dx} \cdot \frac{dY(t)}{dt} = \frac{1}{x} Y'(t)$$

$$y''(x) = \frac{dy'(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(\frac{1}{x} Y'(t)) = -\frac{1}{x^2} Y'(t) + \frac{1}{x} \frac{dY'(t)}{dx} = -\frac{1}{x^2} Y'(t) + \frac{1}{x^2} Y''(t)$$

$$y'''(x) = \frac{dy''(x)}{dx} = \frac{2}{x^3} Y'(t) - \frac{3}{x^3} Y''(t) + \frac{1}{x^3} Y'''(t)$$

將 $y'(x)$ 、 $y''(x)$ 與 $y'''(x)$ 代回 ODE 可得

$$x^3 \left[\frac{2}{x^3} Y'(t) - \frac{3}{x^3} Y''(t) + \frac{1}{x^3} Y'''(t) \right] - 3x^2 \left[-\frac{1}{x^2} Y'(t) + \frac{1}{x^2} Y''(t) \right]$$

$$+ 7x \cdot \frac{1}{x} Y'(t) - 8Y(t) = e^{2t}$$

$$\Rightarrow Y'''(t) - 6Y''(t) + 12Y'(t) - 8Y(t) = e^{2t}$$

(3) ∵ 此為常係數 ODE

∴ 令 $y = e^{\lambda x}$ 代入 ODE 可得

$$(\lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8)e^{\lambda x} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = 2, 2, 2 \text{ (三重根)}$$

$$\therefore \ Y_h = c_1 e^{2t} + c_2 e^{2t} \cdot t + c_3 e^{2t} \cdot t^2$$

(4) 由待定係數法，令 $Y_P = A \cdot e^{2t} \cdot t^3$

$$\therefore \ Y_P' = A(2 \cdot e^{2t} \cdot t^3 + 3 \cdot e^{2t} \cdot t^2)$$

$$Y_P'' = A(4 \cdot e^{2t} \cdot t^3 + 12 \cdot e^{2t} \cdot t^2 + 6 \cdot e^{2t} \cdot t)$$

$$Y_P''' = A(8 \cdot e^{2t} \cdot t^3 + 36 \cdot e^{2t} \cdot t^2 + 36 \cdot e^{2t} \cdot t + 6 \cdot e^{2t})$$

代回 ODE 可得

$$A(8 \cdot e^{2t} \cdot t^3 + 36 \cdot e^{2t} \cdot t^2 + 36 \cdot e^{2t} \cdot t + 6 \cdot e^{2t})$$
$$-6 \cdot A(4 \cdot e^{2t} \cdot t^3 + 12 \cdot e^{2t} \cdot t^2 + 6 \cdot e^{2t} \cdot t)$$
$$+12 \cdot A(2 \cdot e^{2t} \cdot t^3 + 3 \cdot e^{2t} \cdot t^2) - 8 \cdot A \cdot e^{2t} \cdot t^3 = e^{2t}$$

$$\Rightarrow A \cdot 6 \cdot e^{2t} = e^{2t}$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{6}$$

$$\therefore \ Y_P = \frac{1}{6} \cdot e^{2t} \cdot t^3$$

(5) $Y(t) = Y_h(t) + Y_p(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{2t} \cdot t + c_3 e^{2t} \cdot t^2 + \frac{1}{6} \cdot e^{2t} \cdot t^3$

$$\Rightarrow y(x) = c_1 x^2 + c_2 x^2 \cdot \ln x + c_3 x^2 \cdot (\ln x)^2 + \frac{1}{6} \cdot x^2 \cdot (\ln x)^3$$

4. 給一微分方程 $\ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) = F\cos\gamma t$，其中 ω 、 γ 、 F 為常數且 $\gamma \neq \omega$

(1) 試求此微分方程之補解 $y_h(t) = ?$ (6%)

(2) 試求 Wronskian，即 $W(y_1, y_2) = ?$ (4%)

(3) 試求微分方程之通解 $y(t) = ?$ (5%)

(4) 若給初始條件 $y(0) = 0$ 與 $\dot{y}(0) = 0$，則 $y(t) = ?$ (5%)

(5) 當 $\gamma = \omega$ 時，則 $\lim_{\gamma \to \omega} y(t) = ?$ (5%)

(1) $\ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) = F\cos(\gamma t)$

令 $y = e^{\lambda t}$ $\Rightarrow (\lambda^2 + \omega^2)e^{\lambda t} = 0$ $\Rightarrow \lambda = \pm\omega i$

$$\therefore \ y_h = c_1 \cos\omega t + c_2 \sin\omega t$$

(2) 令 $y_1 = \cos\omega t$，$y_2 = \sin\omega t$

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\omega\sin\omega t & \omega\cos\omega t \end{vmatrix} = \omega$$

(3) 使用待定係數法來求其特解

令 $y_p = A\cos\gamma t + B\sin\gamma t$

$y_p' = -A\gamma\sin\gamma t + B\gamma\cos\gamma t$

$y_p'' = -A\gamma^2\cos\gamma t - B\gamma^2\sin\gamma t$ 代回 ODE 後可得

$$-A\gamma^2\cos\gamma t - B\gamma^2\sin\gamma t + \omega^2\cdot(A\cos\gamma t + A\sin\gamma t) = F\cos\gamma t$$

$$\Rightarrow A(\omega^2-\gamma^2)\cos\gamma t + B(\omega^2-\gamma^2)\sin\gamma t = F\cos\gamma t$$

$$\Rightarrow A = \frac{F}{\omega^2-\gamma^2},\quad B = 0$$

$$y_p = \frac{F}{\omega^2-\gamma^2}\cos\gamma t$$

$$\therefore\quad y = y_h + y_p = c_1\cos\omega t + c_2\sin\omega t + \frac{F}{\omega^2-\gamma^2}\cos\gamma t$$

(4) 由 $y(0) = 0 \ \Rightarrow c_1 = -\dfrac{F}{\omega^2-\gamma^2}$

$\dot{y}(0) = 0 \ \Rightarrow c_2 = 0$

$$\therefore\quad y = \frac{F}{\omega^2-\gamma^2}(\cos\gamma t - \cos\omega t)$$

(5) 當 $\gamma = \omega$ 時

$$\lim_{\gamma\to\omega} y(t) = \lim_{\gamma\to\omega}\frac{F}{\omega^2-\gamma^2}(\cos\gamma t - \cos\omega t) = \lim_{\gamma\to\omega}\frac{F\cdot t}{2\gamma}\sin\gamma t = \frac{F\cdot t}{2\omega}\sin\omega t$$

5. 已知微分方程式 $x^2 y'' - x(x+1)y' + xy = 0$

(1) 試以 $y_1 = e^{\lambda x}$ 求出一補解。 (3%)

(2) 試求另一補解。 (7%)

(1) $x^2 y'' - x(x+1)y' + xy = 0$

令 $y_1 = e^{\lambda x}$ 代入 ODE 可得

$$[\lambda^2 x^2 - \lambda x(x+1) + x]e^{\lambda x} = 0 \quad \Rightarrow \lambda^2 x^2 - \lambda x(x+1) + x = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda^2-\lambda)x^2 - (\lambda-1)x = 0$$

$$\Rightarrow \lambda(\lambda-1)x^2 - (\lambda-1)x = 0$$

所以可知 $\lambda = 1$ 滿足上式

故可得一補解為 $y_1 = e^x$

(2) 令另一補解 $y_2 = ve^x \Rightarrow y_2' = v'e^x + ve^x$

$$\Rightarrow y_2'' = v''e^x + 2v'e^x + ve^x$$

代入 ODE: $x^2 y'' - x(x+1)y' + xy = 0$

可得 $x^2(v''e^x + 2v'e^x + ve^x) - x(x+1)(v'e^x + ve^x) + vxe^x = 0$

$$\Rightarrow e^x(x^2 v'' + x^2 v' - xv') = 0$$

令 $z = v' \Rightarrow z' + \dfrac{x-1}{x} z = 0 \Rightarrow \dfrac{1}{z} dz = \dfrac{1-x}{x} dx$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{z} dz = \int \frac{1-x}{x} dx$$

$$\Rightarrow \ln z = \ln x - x + \ln c_1$$

$$\Rightarrow \ln \frac{z}{c_1 \cdot x} = -x$$

$$\Rightarrow z = c_1 \cdot x \cdot e^{-x}$$

$$\Rightarrow v' = c_1 \cdot x \cdot e^{-x}$$

$$\Rightarrow v = c_1 \cdot \int x \cdot e^{-x} dx + c_2$$

$$\Rightarrow v = c_1 \cdot (-1-x) e^{-x} + c_2$$

$$y_2 = ve^x = c_1 \cdot (-1-x) + c_2 e^x = c_3 \cdot (1+x) + c_2 e^x$$

$\therefore$ 另一補解為 $(1+x)$，且 $y = \bar{c}_1 \cdot (1+x) + \bar{c}_2 \cdot e^x$