

系級：_____ 學號：_____ 姓名：_____

1. 已知 x 、 $x+1$ 與 $x-e^{-x}$ 為下述線性微分方程的 3 個解

$$y''(x) + a(x) \cdot y'(x) + b(x) \cdot y(x) = f(x)$$

- (1) 試求 $a(x)$ 、 $b(x)$ 與 $f(x)$ 為何? (9%)
- (2) 試求此微分方程之通解。 (6%)

2. 試求下述微分方程之通解

- (1) $y'' + 2y' + 5y = 3\sin x + \cos x$ (10%)
- (2) $x(x+1)y'' + (4x+1)y' + 2y = 2x+1$ 。 (10%)

3. 已知一微分方程式 $x^3 y''' - 3x^2 y'' + 7xy' - 8y = x^2$

- (1) 試求此微分方程的補解 $y_h(x) = ?$ (7%)
- (2) 以變數變換，令 $t = \ln x$ ，則 $y(x) = Y(t)$ ，試求轉換後以 $Y(t)$ 表示的微分方程式。 (7%)
- (3) 試求轉換後微分方程的補解 $Y_h(t) = ?$ (6%)
- (4) 試求轉換後微分方程的特解 $Y_p(t) = ?$ (6%)
- (5) 試將 $Y(t)$ 轉換回 $y(x)$ 。 (4%)

4. 給一微分方程 $\ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) = F \cos \gamma t$ ，其中 F 為常數且 $\gamma \neq \omega$

- (1) 試求此微分方程之補解 $y_h(t) = ?$ (6%)
- (2) 試求 Wronskian，即 $W(y_1, y_2) = ?$ (4%)
- (3) 試求微分方程之通解 $y(t) = ?$ (5%)
- (4) 若給初始條件 $y(0) = 0$ 與 $\dot{y}(0) = 0$ ，則 $y(t) = ?$ (5%)
- (5) 當 $\gamma = \omega$ 時，則 $\lim_{\gamma \rightarrow \omega} y(t) = ?$ (5%)

5. 已知微分方程式 $xy'' - (x+1)y' + y = 0$

- (1) 試以 $y_1 = e^{\lambda x}$ 求一補解。 (3%)
- (2) 試求另一補解。 (7%)