國立臺灣海洋大學河海工程學系 2015 工程數學(一) 第一次大考參考解答

系級：____________　　學號：____________　　姓名：____________

1. 已知微分方程式為 $y' = \dfrac{y}{x+\sqrt{xy}}$ ，試求:在點 (2, 2) 的切線斜率。 (5%)

2. 已知 $e^{\alpha x}(2y^{-2}e^{x}+1)\,dx - 2y^{\beta}e^{2x}dy = 0$ 為一正合微分方程，且 α 、β 均為常數
   (a) 試求常數 α 、β 之值。(8%)
   (b) 求解此一正合微分方程式。(5%)

3. 已知微分方程式為 $xy' + y = -\dfrac{1}{y}$
   (1) 此微分方程式為線性或非線性? (5%) 並以一階線性法求解。(8%)
   (若為線性，直接求解；若非線性，使用變數變換法轉成線性，再求解)
   (2) 此微分方程式為正合(exact)或非正合? (5%) 並以正合法求解。(8%)
   (若正合，直接求解；若非正合，先求出積分因子，再求解)
   (3) 試以分離變數法求解。(8%)

4. 已知 Clairaut 微分方程式為 $xy'^2 - yy' + 1 = 0$ ，試求此微分方程式的通解 (general solution)與奇解(singular solution)。 (10%)

5. 已知 Riccati 微分方程式為 $y' + y^2 = \dfrac{y}{x} - \dfrac{1}{x^2}$
   (1) 先以觀察法得一特解 S 。 (令 $S = x^m$) (3%)
   (2) 再由變數變換($y = W + S$)將上述 ODE 轉換為以 W 表示之微分方程。 (4%)
   請問:轉換後為何種類型微分方程式。 (2%)
   (3) 試求 $W = ?$ 並寫出最後解的表示式($y = W + S$)。 (8%)

6. 試解下列各微分方程
   (1) $xy' = \dfrac{y^2}{x} + y$ (7%)
   (2) $y' + 3y = \sin 3x$ (7%)
   (3) $(x^2-1)y' = 2\tan y$, $y(3) = \dfrac{\pi}{6}$ (7%)

參考解答:

1. 已知微分方程式為 $y' = \dfrac{y}{x+\sqrt{xy}}$ **，試求:在點** $(2,2)$ **的切線斜率。 (5%)**

在點 $(2,2)$ 時切線斜率為 $y' = \dfrac{2}{2+\sqrt{2\cdot 2}} = \dfrac{1}{2}$

2. 已知 $e^{\alpha x}(2y^{-2}e^{x}+1)\,dx - 2y^{\beta}e^{2x}dy = 0$ **為一正合微分方程，且** α **、** β **均為常數**

(a) 試求常數 α **、** β **之值。(8%)**

(b) 求解此一正合微分方程式。(5%)

令 $M = e^{\alpha x}(2y^{-2}e^{x}+1) \quad \Rightarrow \dfrac{\partial M}{\partial y} = -4y^{-3}e^{(\alpha+1)x}$

$N = -2y^{\beta}e^{2x} \quad \Rightarrow \dfrac{\partial N}{\partial x} = -4y^{\beta}e^{2x}$

∵ 此為正合微分方程式

∴ $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ 即 $\alpha = 1$, $\beta = -3$

故此微分方程式為 $(2y^{-2}e^{2x}+e^{x})\,dx - 2y^{-3}e^{2x}dy = 0$

又 $M = \dfrac{\partial \phi}{\partial x} = (2y^{-2}e^{2x}+e^{x}) \quad \Rightarrow \phi = y^{-2}e^{2x}+e^{x}+f(y)$

$N = \dfrac{\partial \phi}{\partial y} = -2y^{-3}e^{2x} \quad \Rightarrow \phi = y^{-2}e^{2x}+g(x)$

比較係數後可得 $\phi(x,y) = y^{-2}e^{2x}+e^{x}$

其解為 $\phi(x,y) = c \quad \Rightarrow y^{-2}e^{2x}+e^{x} = c$

3. 已知微分方程式為 $xy' + y = -\dfrac{1}{y}$

(1) 此微分方程式為線性或非線性? (5%) 並以一階線性法求解。(8%)
(若為線性，直接求解；若非線性，使用變數變換法轉成線性，再求解)

(2) 此微分方程式為正合(exact)或非正合? (5%) 並以正合法求解。(8%)
(若正合，直接求解；若非正合，先求出積分因子，再求解)

(3) 試以分離變數法求解。(8%)

(1) $xy' + y = -\dfrac{1}{y} \quad \Rightarrow xyy' + y^2 = -1$

因為有 yy' 與 y^2 項存在，所以此為非線性 ODE。

令 $u = y^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2y\frac{dy}{dx}$ 代回 ODE 可得

$\frac{1}{2}x\frac{du}{dx} + u = -1 \quad \Rightarrow \frac{du}{dx} + \frac{2}{x}u = -\frac{2}{x}$ $\longrightarrow$ 此為一階線性 ODE

$\therefore$ 積分因子 $\mu = e^{\int \frac{2}{x}dx} = x^2$

將 ODE 同乘積分因子後可得 $x^2\frac{du}{dx} + 2xu = -2x$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(x^2u) = -2x$$

$$\Rightarrow \int d(x^2u) = -\int 2x\,dx$$

$$\Rightarrow x^2u = -x^2 + c$$
$$\Rightarrow x^2y^2 + x^2 = c$$

(2) $xy' + y = -\frac{1}{y} \quad \Rightarrow (y^2+1)\,dx + xy\,dy = 0$ (化為標準型)

$M = y^2 + 1 \quad \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 2y$

$N = xy \quad \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = y$

$\because$ 判別式 $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$

$\therefore$ 此為非正合 ODE

由 $\frac{1}{N}(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}) = \frac{2y-y}{xy} = \frac{1}{x}$ 可知積分因子 μ 為 x 函數

即 $\frac{1}{\mu}d\mu = \frac{1}{N}(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x})dx \quad \Rightarrow \int\frac{1}{\mu}d\mu = \int\frac{1}{x}dx$

$$\Rightarrow \ln\mu = \ln x$$
$$\Rightarrow \mu = x$$

將 ODE 同乘積分因子後可得 $(xy^2 + x)\,dx + x^2y\,dy = 0$

$\because$ 此為正合微分方程式

$\therefore$ $M = \frac{\partial\phi}{\partial x} = xy^2 + x \quad \Rightarrow \phi = \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{2}x^2 + f(y)$

$N = \frac{\partial\phi}{\partial y} = x^2y \quad \Rightarrow \phi = \frac{1}{2}x^2y^2 + g(x)$

比較係數後可得 $\phi(x,y) = \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{2}x^2$

其解為 $\phi(x,y) = c \quad \Rightarrow \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{2}x^2 = c$

(3) $xy' + y = -\dfrac{1}{y} \quad \Rightarrow x\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y^2+1}{y}$

$$\Rightarrow \frac{y}{y^2+1}dy = -\frac{1}{x}dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{y}{y^2+1}dy = -\int \frac{1}{x}dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\ln\left|y^2+1\right| = -\ln|x| + c_1$$

$$\Rightarrow \ln\left|y^2+1\right| + 2\ln|x| = 2c_1$$

$$\Rightarrow x^2y^2 + x^2 = e^{2c_1} \qquad \Rightarrow x^2y^2 + x^2 = c$$

4. 已知 Clairaut 微分方程式為 $xy'^2 - yy' + 1 = 0$，試求此微分方程式的通解 (general solution)與奇解(singular solution)。 (10%)

$xy'^2 - yy' + 1 = 0 \quad \Rightarrow y = xy' + \dfrac{1}{y'}$

令 $u = y'$ 代回 ODE 可得 $y = xu + \dfrac{1}{u}$

同時將兩邊對 x 微分: $y' = u + xu' - \dfrac{u'}{u^2} \;\Rightarrow u = u + xu' - \dfrac{u'}{u^2}$

$$\Rightarrow u'(x - \frac{1}{u^2}) = 0$$

$$\Rightarrow u' = 0 \text{ 或 } u^2 = \frac{1}{x}$$

當 $u' = 0 \quad \Rightarrow u = c \quad \Rightarrow y = c\cdot x + \dfrac{1}{c}$ （通解）

當 $u^2 = \dfrac{1}{x} \;\Rightarrow uy = xu^2 + 1 \;\Rightarrow uy = 2 \;\Rightarrow u^2y^2 = 4 \;\Rightarrow y^2 = 4x$ （奇解）

5. 已知 Riccati 微分方程式為 $y' + y^2 = \dfrac{y}{x} - \dfrac{1}{x^2}$

(1) 先以觀察法得一特解 S 。 (令 $S = x^m$) (3%)

(2) 再由變數變換($y = W + S$)將上述 ODE 轉換為以 W 表示之微分方程。(4%)

請問:轉換後為何種類型微分方程式。 (2%)

(3) 試求 $W = ?$ 並寫出最後解的表示式($y = W + S$)。 (8%)

(1) 令 $y = S = x^m$ 代入 ODE 可得 $\Rightarrow mx^{m-1} + x^{2m} = x^{m-1} - x^{-2}$

∴ 可得 $m = -1$ 即 $S = \dfrac{1}{x}$

(2) 令 $y = W + S = W + \frac{1}{x}$ 代入 ODE 可得

$$(W' - \frac{1}{x^2}) + (W + \frac{1}{x})^2 = \frac{1}{x}(W + \frac{1}{x}) - \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow W' - \frac{1}{x^2} + W^2 + \frac{2}{x}W + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x}W + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow W' + \frac{1}{x}W = -W^2$$

∴ 可知此為 Bernoulli ODE

(3) $W' + \frac{1}{x}W = -W^2 \quad \Rightarrow W^{-2}W' + \frac{1}{x}W^{-1} = -1$

令 $u = W^{-1} \Rightarrow u' = -W^{-2}W'$ 代回 ODE 可得

$u' - \frac{1}{x}u = 1$ ⟶ 此為一階線性 ODE

∴ 積分因子 $\mu = e^{-\int \frac{1}{x}dx} = \frac{1}{x}$

將 ODE 同乘積分因子後可得 $\frac{1}{x}u' - \frac{1}{x^2}u = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \frac{d}{dx}(\frac{1}{x}u) = \frac{1}{x}$

$$\Rightarrow \int d(\frac{1}{x}u) = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x}u = \ln|x| + c$$

$$\Rightarrow u = x\ln|x| + cx$$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{x\ln|x| + cx}$$

∴ $y = W + S = \frac{1}{x\ln|x| + cx} + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}(1 + \frac{1}{\ln|x| + c})$

6. 試解下列各微分方程

(1) $xy' = \frac{y^2}{x} + y$ **(7%)**

(2) $y' + 3y = \sin 3x$ **(7%)**

(3) $(x^2 - 1)y' = 2\tan y$，$y(3) = \frac{\pi}{6}$ **(7%)**

(1) $xy' = \frac{y^2}{x} + y \quad \Rightarrow y' = \frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x}$ ⟶ 齊次型 ODE

令 $u=\dfrac{y}{x}$ $\Rightarrow y=ux$ $\Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{du}{dx}\cdot x+u$ 代回 ODE

$\dfrac{du}{dx}\cdot x+u=u^2+u$ $\Rightarrow \dfrac{du}{dx}\cdot x=u^2$ $\Rightarrow \dfrac{1}{u^2}du=\dfrac{1}{x}dx$

$$\Rightarrow \int\frac{1}{u^2}du=\int\frac{1}{x}dx$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{u}=\ln|x|+c$$

$$\Rightarrow -\frac{x}{y}=\ln|x|+c$$

(2) $y'+3y=\sin 3x$ ⟶ 此為一階線性 ODE

∴ 積分因子 $\mu=e^{\int 3dx}=e^{3x}$

將 ODE 同乘積分因子後可得 $e^{3x}y'+3e^{3x}y=e^{3x}\cdot\sin 3x$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(e^{3x}y)=e^{3x}\cdot\sin 3x$$

$$\Rightarrow d(e^{3x}y)=e^{3x}\cdot\sin 3x\,dx$$

$$\Rightarrow \int d(e^{3x}y)=\int e^{3x}\cdot\sin 3x\,dx$$

$$\Rightarrow e^{3x}y=\frac{1}{6}e^{3x}(\sin 3x-\cos 3x)+c$$

$$\Rightarrow y=\frac{1}{6}(\sin 3x-\cos 3x)+ce^{-3x}$$

(3) $(x^2-1)y'=2\tan y$ $\Rightarrow \dfrac{\cos y}{\sin y}dy=\dfrac{2}{x^2-1}dx$

$$\Rightarrow \int\frac{\cos y}{\sin y}dy=\int\frac{2}{x^2-1}dx$$

$$\Rightarrow \int\frac{1}{\sin y}d(\sin y)=\int(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1})dx$$

$$\Rightarrow \ln|\sin y|=\ln|x-1|-\ln|x+1|+\ln|c|$$

$$\Rightarrow \sin y=c\frac{x-1}{x+1}$$

又 $y(3)=\dfrac{\pi}{6}$ $\Rightarrow \sin\dfrac{\pi}{6}=c\dfrac{3-1}{3+1}$ $\Rightarrow c=1$

∴ $\sin y=\dfrac{x-1}{x+1}$