

系級：_____ 學號：_____ 姓名：_____

1. 已知微分方程式為 $y' = \frac{y}{x + \sqrt{xy}}$ ，試求：在點(2, 2)的切線斜率。(5%)

2. 已知 $e^{\alpha x}(2y^{-2}e^x + 1)dx - 2y^{\beta}e^{2x}dy = 0$ 為一正合微分方程，且 α 、 β 均為常數
 - (a) 試求常數 α 、 β 之值。(8%)
 - (b) 求解此一正合微分方程式。(5%)

3. 已知微分方程式為 $xy' + y = -\frac{1}{y}$
 - (1) 此微分方程式為線性或非線性?(5%) 並以一階線性法求解。(8%)
(若為線性，直接求解；若非線性，使用變數變換法轉成線性，再求解)
 - (2) 此微分方程式為正合(exact)或非正合?(5%) 並以正合法求解。(8%)
(若正合，直接求解；若非正合，先求出積分因子，再求解)
 - (3) 試以分離變數法求解。(8%)

4. 已知 Clairaut 微分方程式為 $xy'^2 - yy' + 1 = 0$ ，試求此微分方程式的通解 (general solution) 與奇解(singular solution)。(10%)

5. 已知 Riccati 微分方程式為 $y' + y^2 = \frac{y}{x} - \frac{1}{x^2}$
 - (1) 先以觀察法得一特解 S 。(令 $S = x^m$) (3%)
 - (2) 再由變數變換($y = W + S$)將上述 ODE 轉換為以 W 表示之微分方程。(4%)
請問：轉換後為何種類型微分方程式。(2%)
 - (3) 試求 $W = ?$ 並寫出最後解的表示式($y = W + S$)。(8%)

6. 試解下列各微分方程
 - (1) $xy' = \frac{y^2}{x} + y$ (7%)
 - (2) $y' + 3y = \sin 3x$ (7%)
 - (3) $(x^2 - 1)y' = 2 \tan y$, $y(3) = \frac{\pi}{6}$ (7%)