國立臺灣海洋大學河海工程學系 2015 工程數學(一) 期末考參考解答

系級：______________ 學號：____________ 姓名：___________

1. **已知** $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{bmatrix}$，$B^{-1}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}-4 & 0\\ 4 & 1\end{bmatrix}$，**試求:**

(1) $\det(B^T)=?$ **(5%)** **(2)** $\det(AB)=?$ **(5%)** **(3)** $(AB)^{-1}=?$ **(10%)**

2. **給一矩陣** $A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & a\\ 2 & 4 & b\\ 2 & 1 & c\end{bmatrix}$，**其中 *a*、*b*、*c* 均為常數，並且知道矩陣 *A* 有兩特徵向量為** $x^1=\begin{Bmatrix}0\\1\\1\end{Bmatrix}$ **與** $x^2=\begin{Bmatrix}-1\\0\\2\end{Bmatrix}$，**試問:**

(1) *a*、*b*、*c* 之值為何? (9%)

(2)矩陣 *A* 之特徵值為何? (6%)

(3)第三個特徵向量 $x^3=?$ **(5%)**

3. ***A* 為** 3×3 **矩陣，若已知 *A* 之特徵值為** $\lambda_1=1$，$\lambda_2=3$，$\lambda_3=5$ **且其所對應的特徵向量為** $x^1=\begin{Bmatrix}1\\-1\\1\end{Bmatrix}$，$x^2=\begin{Bmatrix}1\\0\\-1\end{Bmatrix}$，$x^3=\begin{Bmatrix}1\\2\\1\end{Bmatrix}$，**試問:**

(1) $A=?$ **(10%)**

(2) $A^3-9A^2+23A=?$ **(10%)**

(3) 若 $A^{-1}=pA^2+qA+rI$ **，則** $p=?$，$q=?$，$r=?$ **(10%)**

4. **已知矩陣** $A=\begin{bmatrix}5 & 4 & 3\\ -1 & 0 & -3\\ 1 & -2 & 1\end{bmatrix}$，**試將 *A* 化為喬登正則式，即** $A=SJS^{-1}$。 **(10%)**

5. (1) $A=\begin{bmatrix}4 & -2\\ 1 & 1\end{bmatrix}$，**試求 *A* 之特徵值與特徵向量。(10%)**

(2) 已知聯立方程組 $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=4x-2y\\ \dfrac{dy}{dt}=x+y\end{cases}$ **並且給初始條件為** $x(0)=3$，$y(0)=2$

試求: $x(t)=?$，$y(t)=?$ **(10%)**

參考解答:

1. 已知 $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{bmatrix}$，$B^{-1}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}-4 & 0\\ 4 & 1\end{bmatrix}$，試求:

(1) $\det(B^T)=?$ **(5%)** **(2)** $\det(AB)=?$ **(5%)** **(3)** $(AB)^{-1}=?$ **(10%)**

(1) $\det(A)=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-4$，$\det(B^{-1})=\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 1 & \frac{1}{4}\end{vmatrix}=-\frac{1}{4}$

$BB^{-1}=I \quad \Rightarrow \det(BB^{-1})=\det(I) \quad \Rightarrow \det(B)\cdot\det(B^{-1})=1 \quad \Rightarrow \det(B)=-4$

$\det(B^T)=\det(B)=-4$

(2) $\det(AB)=\det(A)\cdot\det(B)=16$

(3) $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{bmatrix} \quad \Rightarrow A^{-1}=-\frac{1}{4}\begin{bmatrix}2 & -2\\ -3 & 1\end{bmatrix}$

$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}=-\frac{1}{16}\begin{bmatrix}-4 & 0\\ 4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -2\\ -3 & 1\end{bmatrix}=-\frac{1}{16}\begin{bmatrix}-8 & 8\\ 5 & -7\end{bmatrix}$

2. 給一矩陣 $A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & a\\ 2 & 4 & b\\ 2 & 1 & c\end{bmatrix}$，其中 ***a***、***b***、***c*** 均為常數，並且知道矩陣 ***A*** 有兩特徵向量為 $x^1=\begin{Bmatrix}0\\1\\1\end{Bmatrix}$ 與 $x^2=\begin{Bmatrix}-1\\0\\2\end{Bmatrix}$，試問:

(1) *a*、*b*、*c* 之值為何? (9%)

(2)矩陣 *A* 之特徵值為何? (6%)

(3)第三個特徵向量 $x^3=?$ **(5%)**

(1) 由特徵值的定義 $Ax=\lambda x$ 可知

$$\begin{bmatrix}-1 & 2 & a\\ 2 & 4 & b\\ 2 & 1 & c\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\1\\1\end{Bmatrix}=\lambda_1\begin{Bmatrix}0\\1\\1\end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \begin{cases}2+a=0\\ 4+b=\lambda_1\\ 1+c=\lambda_1\end{cases} \quad \Rightarrow a=-2$$

$$\begin{bmatrix}-1 & 2 & -2\\ 2 & 4 & b\\ 2 & 1 & c\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-1\\0\\2\end{Bmatrix}=\lambda_2\begin{Bmatrix}-1\\0\\2\end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \begin{cases}1-4=-\lambda_2\\ -2+2b=0\\ -2+2c=2\lambda_2\end{cases} \quad \Rightarrow \begin{matrix}\lambda_2=3\\ b=1\\ c=4\end{matrix}$$

$\therefore$ 可得 $\lambda_1=5$

(2) $trace(A)=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 \quad \Rightarrow -1+4+4=5+3+\lambda_3 \;\Rightarrow \lambda_3=-1$

$\therefore\ \lambda_1=5,\ \lambda_2=3,\ \lambda_3=-1$

(3) $Ax^3=\lambda x^3 \quad \Rightarrow (A-\lambda I)x^3=0 \quad \Rightarrow \begin{bmatrix}0 & 2 & -2\\ 2 & 5 & 1\\ 2 & 1 & 5\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases}2x_2-2x_3=0\\ 2x_1+5x_2+x_3=0\end{cases} \quad \Rightarrow x_2=t,\ x_3=t,\ x_1=-3t$$

$$\therefore\ x^3=\begin{Bmatrix}-3\\ 1\\ 1\end{Bmatrix}$$

3. *A* 為 3×3 矩陣，若已知 *A* 之特徵值為 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=3$，$\lambda_3=5$ 且其所對應的特徵向量為 $x^1=\begin{Bmatrix}1\\-1\\1\end{Bmatrix}$，$x^2=\begin{Bmatrix}1\\0\\-1\end{Bmatrix}$，$x^3=\begin{Bmatrix}1\\2\\1\end{Bmatrix}$，試問:

(1) $A=?$ **(10%)**

(2) $A^3-9A^2+23A=?$ **(10%)**

(3) 若 $A^{-1}=pA^2+qA+rI$ ，則 $p=?$，$q=?$，$r=?$ **(10%)**

(1) $AS=SD \quad \Rightarrow A=SDS^{-1}$

由 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=3$，$\lambda_3=5 \;\Rightarrow D=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$

由 $x^1=\begin{Bmatrix}1\\-1\\1\end{Bmatrix}$，$x^2=\begin{Bmatrix}1\\0\\-1\end{Bmatrix}$，$x^3=\begin{Bmatrix}1\\2\\1\end{Bmatrix} \;\Rightarrow S=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$

$$\Rightarrow S^{-1}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}2 & -2 & 2\\ 3 & 0 & -3\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

$$A=SDS^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}\frac{1}{6}\begin{bmatrix}2 & -2 & 2\\ 3 & 0 & -3\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}8 & 4 & -1\\ 4 & 11 & 4\\ -1 & 4 & 8\end{bmatrix}$$

(2)

$$A^3-9A^2+23A=S\begin{bmatrix}1^3-9\cdot1^2+23\cdot1 & 0 & 0\\ 0 & 3^3-9\cdot3^2+23\cdot3 & 0\\ 0 & 0 & 5^3-9\cdot5^2+23\cdot5\end{bmatrix}S^{-1}$$

$$=S\begin{bmatrix}15&0&0\\0&15&0\\0&0&15\end{bmatrix}S^{-1}=15\cdot SIS^{-1}=15\cdot I=\begin{bmatrix}15&0&0\\0&15&0\\0&0&15\end{bmatrix}$$

(3) 由上式 $A^3-9A^2+23A=15\cdot I$

$$\Rightarrow A^{-1}(A^3-9A^2+23A)=15\cdot A^{-1}$$

$$\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{15}A^2-\frac{3}{5}A+\frac{23}{15}I$$

$$\therefore\ p=\frac{1}{15},\ q=-\frac{3}{5},\ r=\frac{23}{15}$$

4. 已知矩陣 $A=\begin{bmatrix}5&4&3\\-1&0&-3\\1&-2&1\end{bmatrix}$**，試將 *A* 化為喬登正則式，即** $A=SJS^{-1}$**。 (10%)**

$$\det(A-\lambda I)=0\Rightarrow\begin{vmatrix}5-\lambda&4&3\\-1&-\lambda&-3\\1&-2&1-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^3+6\lambda^2-32=0$$

$$\therefore\ \lambda=-2,4,4$$

$$當\ \lambda_1=-2\Rightarrow\begin{bmatrix}7&4&3\\-1&2&-3\\1&-2&3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow x^1=\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1\\-1\\-1\end{Bmatrix}t\qquad\therefore\ x^1=\begin{Bmatrix}1\\-1\\-1\end{Bmatrix}$$ (取最簡單之向量，令 $t=1$)

$$當\ \lambda_2=\lambda_3=4\Rightarrow\begin{bmatrix}1&4&3\\-1&-4&-3\\1&-2&-3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow x^2=\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1\\-1\\1\end{Bmatrix}t\qquad\therefore\ x^2=\begin{Bmatrix}1\\-1\\1\end{Bmatrix}$$ (取最簡單之向量，令 $t=1$)

由於缺少一個特徵向量 x^3，故矩陣無法對角化
所以需使用廣義特徵向量來求 x^3

$$Ax^3 = \lambda_3 x^3 + x^2 \quad \Rightarrow (A-\lambda_3 I)x^3 = x^2$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & -4 & -3 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix} t + \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \text{令 } t=0\text{，取廣義特徵向量 } x^3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

ps. 令 $t=1$，取廣義特徵向量 $x^3 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$ 亦可

$$\therefore S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix},\ J = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix},\ S^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = SJS^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

5. (1) $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$**，試求 A 之特徵值與特徵向量。(10%)**

(2) 已知聯立方程組 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y \end{cases}$ **並且給初始條件為** $x(0)=3$，$y(0)=2$

試求: $x(t)=?$，$y(t)=?$ **(10%)**

(1) $\det(A-\lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$

$\therefore \lambda = 2, 3$

當 $\lambda_1 = 2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow x^1 = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$

當 $\lambda_1 = 3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow x^2 = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$

(2) $S = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},\ S^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y \end{cases} \quad \Rightarrow \frac{d}{dt}\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \ \Rightarrow \frac{dX}{dt} = AX$$

$\therefore\ A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ X = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$

由 $AS = SD \quad \Rightarrow A = SDS^{-1}$

$\therefore\ \dfrac{dX}{dt} = SDS^{-1}X \quad \Rightarrow \dfrac{d(S^{-1}X)}{dt} = DS^{-1}X$

令 $Y = S^{-1}X \quad \Rightarrow X = SY$

$\therefore\ \dfrac{dX}{dt} = SDS^{-1}X \ \Rightarrow \dfrac{dY}{dt} = DY$

即 $\dfrac{d}{dt}\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \begin{matrix} \dfrac{dy_1}{dt} = 2y_1 \\ \dfrac{dy_2}{dt} = 3y_2 \end{matrix} \quad \Rightarrow \begin{matrix} y_1 = c_1 e^{2t} \\ y_2 = c_2 e^{3t} \end{matrix}$

由 $X = SY \quad \Rightarrow \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 e^{2t} \\ c_2 e^{3t} \end{Bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_1 e^{2t} + 2c_2 e^{3t} \\ c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} \end{Bmatrix}$

又 $x(0) = 3$，$y(0) = 2 \quad \Rightarrow c_1 = 1,\ c_2 = 1$

$\therefore\ x = e^{2t} + 2e^{3t},\ \ y = e^{2t} + e^{3t}$