

系級：_____ 學號：_____ 姓名：_____

1. 已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, $B^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$, 試求:

(1) $\det(B^T) = ?$ (5%) (2) $\det(AB) = ?$ (5%) (3) $(AB)^{-1} = ?$ (10%)

2. 給一矩陣 $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & a \\ 2 & 4 & b \\ 2 & 1 & c \end{bmatrix}$, 其中 a 、 b 、 c 均為常數, 並且知道矩陣 A 有兩特

徵向量為 $x^1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$ 與 $x^2 = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{Bmatrix}$, 試問:

(1) a 、 b 、 c 之值為何? (9%)

(2) 矩陣 A 之特徵值為何? (6%)

(3) 第三個特徵向量 $x^3 = ?$ (5%)

3. A 為 3×3 矩陣, 若已知 A 之特徵值為 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 5$ 且其所對應的

特徵向量為 $x^1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix}$, $x^2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix}$, $x^3 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$, 試問:

(1) $A = ?$ (10%)

(2) $A^3 - 9A^2 + 23A = ?$ (10%)

(3) 若 $A^{-1} = pA^2 + qA + rI$, 則 $p = ?$, $q = ?$, $r = ?$ (10%)

4. 已知矩陣 $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, 試將 A 化為喬登正則式, 即 $A = SJS^{-1}$ 。(10%)

5. (1) $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, 試求 A 之特徵值與特徵向量。(10%)

(2) 已知聯立方程組 $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - 2y \\ \frac{dy}{dt} = x + y \end{cases}$ 並且給初始條件為 $x(0) = 3$, $y(0) = 2$

試求: $x(t) = ?$, $y(t) = ?$ (10%)