國立臺灣海洋大學河海工程學系 2015 工程數學(二) 2A 班第二次大考參考解答

系級：______________　　學號：____________　　姓名：___________

1. (1) **試解特徵問題:** $y''+\lambda y=0$；$y'(0)=0$，$y(\pi)=0$，**請求出特徵值與特徵函數。(10%)**

(2) **試說明何謂函數正交。(5%)**

(3) **請問(1)所得之特徵函數在區間** $[0,\pi]$ **上是否正交 (須說明原因)。(5%)**

2. **已知** $f(x)=x^2+x$ **就其在區間** $(0,2)$ **之部分，全幅展開得** $g(x)$**，半幅正弦展開得** $G(x)$**，半幅餘弦展開得** $F(x)$**，試問:** $g(-1)$、$F(2)$、$F(-1)$、$G(2)$ **與** $G(-5)$ **之值。(15%)**

3. **已知在** $-2\le x\le 2$ **時，** $f(x)=2-x^2$**，試求:** $f(x)$ **的傅立葉級數展開並計算** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ **與** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ **之值。(15%)**

4. **若** $f(t)=\begin{cases}1, 0\le t\le\pi\\ 0, t<0 \text{ and } t>\pi\end{cases}$ **且** $g(t)=\begin{cases}\sin t, 0\le t\le\pi\\ 0, t<0 \text{ and } t>\pi\end{cases}$

(a) **請問** $F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt=?$ **與** $G(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i\omega t}dt=?$ **(10%)**

(b) **若** $p(t)=g(t-\pi)$, **則** $P(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} p(t)e^{-i\omega t}dt=?$ **(5%)**

(c) **若** $q(t)=\frac{dg(t)}{dt}$, **則** $Q(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} q(t)e^{-i\omega t}dt=?$ **(5%)**

(d) $h(t)=f(t)*g(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau=?$ **(5%)**

(hint: 請將 *t* 分成 $t<0$，$0\le t\le\pi$，$\pi\le t\le 2\pi$ **與** $t>2\pi$ **討論)**

(e) $H(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-i\omega t}dt=?$ **(5%)**

5. (1) **試求** $f(x)=\begin{cases}a, |x|<a\\ 0, |x|>a\end{cases}$ **之傅立葉轉換，其中** $a>0$ **(10%)**

(2) $\int_{-\infty}^{\infty}(\frac{\sin\omega a}{\omega a})^2 d\omega=?$ **(10%)**

參考解答：

1. (1) 試解特徵問題: $y''+\lambda y=0$；$y'(0)=0$ ，$y(\pi)=0$ ，請求出特徵值與特徵函數。 (10%)

(2) 試說明何謂函數正交。 (5%)

(3) 請問(1)所得之特徵函數是否正交 (須說明原因)。 (5%)

(1) (a) 令 $\lambda=-k^2$

可得 $y(x)=c_1\cosh kx+c_2\sinh kx$

由 $y'(0)=0 \;\; \Rightarrow c_2=0$

$y(\pi)=0 \;\; \Rightarrow c_1=0$

(b) 令 $\lambda=0$

可得 $y(x)=c_1+c_2x$

由 $y'(0)=0 \;\; \Rightarrow c_2=0$

$y(\pi)=0 \;\; \Rightarrow c_1=0$

(c) 令 $\lambda=k^2$

可得 $y(x)=c_1\cos kx+c_2\sin kx$

由 $y'(0)=0 \;\; \Rightarrow c_2=0$

$y(\pi)=0 \;\; \Rightarrow c_1\cos k\pi=0$

$\because \;\; c_1=0$ (trivial solution)

$\therefore$ 可知其為 $\cos k\pi=0 \;\; \Rightarrow k=\dfrac{2n-1}{2} \;\; (n=1,2,3,\cdots\cdots)$

故特徵值為 $\lambda=(\dfrac{2n-1}{2})^2$

特徵函數為 $y(x)=\cos(\dfrac{2n-1}{2}x) \;\; (n=1,2,3,\cdots\cdots)$

(2) 若某組函數 $\phi_m(x)$ 具有下述特性

$$<\phi_m,\phi_n>=\int_a^b\phi_m(x)\phi_n(x)\,dx\begin{cases}=0 & if\;\, m\neq n\\ \neq 0 & if\;\, m=n\end{cases}$$

則稱此組函數在區間 $[a,b]$ 上正交。

(3) 是

$$\int_0^\pi \cos(\frac{2m-1}{2}x)\cos(\frac{2n-1}{2}x)\,dx$$

$$=\int_0^\pi [\cos(\frac{2m-1}{2}x+\frac{2n-1}{2}x)+\cos(\frac{2m-1}{2}x-\frac{2n-1}{2}x)]\,dx$$

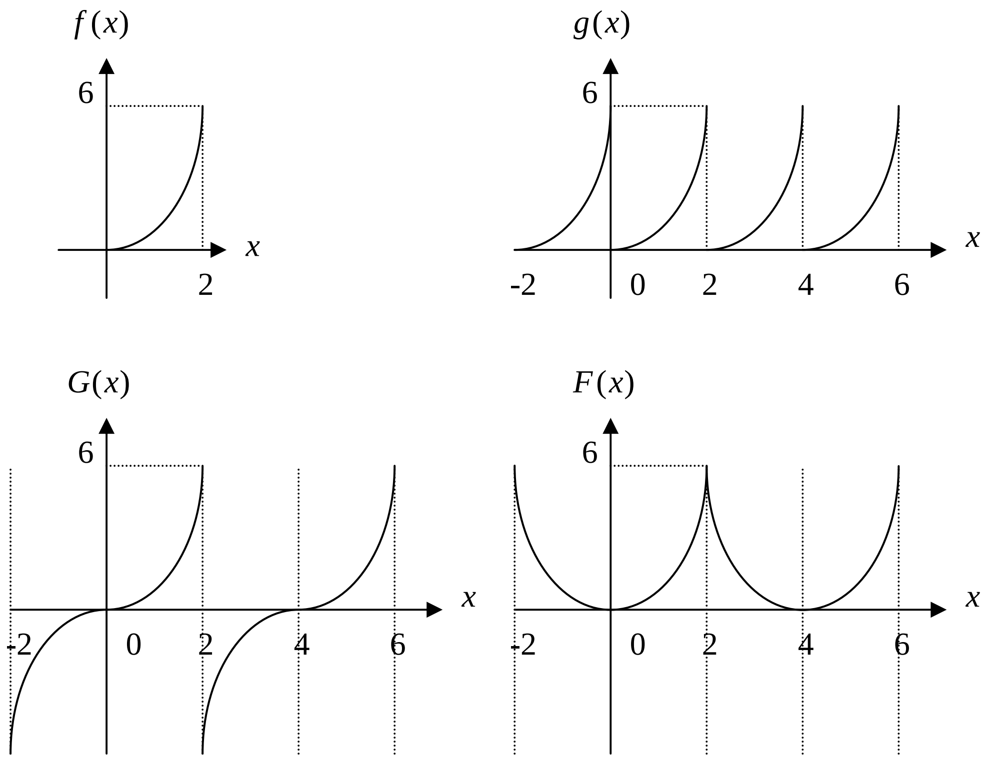
$$=\int_0^\pi [\cos(m+m-1)x+\cos(m-n)x]\,dx$$

$$=\frac{1}{m+n-1}\sin(m+n-1)x\Big|_0^\pi+\frac{1}{m-n}\sin(m-n)x\Big|_0^\pi$$

由於 $m,n=1,2,3,\cdots$

所以上式積分恆為零，故此組特徵函數互為正交。

2. 已知 $f(x)=x^2+x$ 就其在區間 $(0,2)$ 之部分，全幅展開得 $g(x)$，半幅正弦展開得 $G(x)$，半幅餘弦展開得 $F(x)$，試問：$g(-1)$、$F(2)$、$F(-1)$、$G(2)$ 與 $G(-5)$ 之值。 (15%)



全幅展開 $(T=2)$

$\therefore\ g(-1)=g(-1+2)=g(1)=f(1)=2$

半幅正弦展開 $(T=4)$

$\therefore\ G(2)=0$

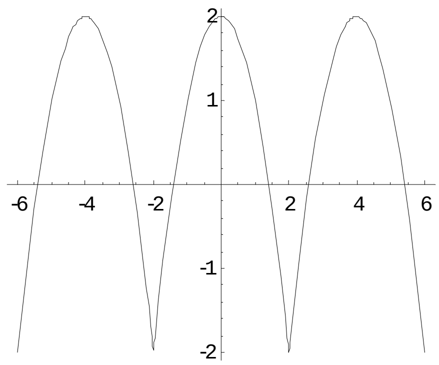
$G(-5)=G(-5+4)=G(-1)=-G(1)=-f(1)=-2$

半幅餘弦展開 $(T=4)$

$\therefore\ F(2)=f(2)=6$

$F(-1)=F(1)=f(1)=2$

3. 已知在 $-2\le x\le 2$ 時，$f(x)=2-x^2$，試求：$f(x)$ 的傅立葉級數展開並計算 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 與 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ 之值。(15%)



由圖可知 $f(x)=2-x^2$ 在 $-2\le x\le 2$ 為偶函數且週期 $T=4$

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos\frac{2n\pi x}{T}+b_n\sin\frac{2n\pi x}{T}]=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{2}$$

$$a_0=\frac{1}{4}\int_{-2}^{2}f(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_{0}^{2}(2-x^2)\,dx=\frac{2}{3}$$

$$a_n=\frac{2}{4}\int_{-2}^{2}f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx=\int_{0}^{2}(2-x^2)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx$$

$$=\left[\frac{2}{n\pi}(2-x^2)\sin\frac{n\pi}{2}x-\frac{8}{n^2\pi^2}x\cdot\cos\frac{n\pi}{2}x+\frac{16}{n^3\pi^3}\sin\frac{n\pi}{2}x\right]_0^2$$

$$=-\frac{16\cdot(-1)^n}{n^2\pi^2}$$

$$f(x)=\frac{2}{3}-\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{2}$$

當 $x=2$ 時， $f(2)=\frac{2}{3}-\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos n\pi=\frac{2}{3}-\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

$$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=-\frac{\pi^2}{16}\cdot(-2-\frac{2}{3})=\frac{\pi^2}{6}$$

當 $x=0$ 時， $f(0)=\frac{2}{3}-\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=\frac{2}{3}+\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$

$$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{16}\left[f(0)-\frac{2}{3}\right]=\frac{\pi^2}{12}$$

4. 若 $f(t)=\begin{cases}1, 0\le t\le\pi\\0, t<0 \text{ and } t>\pi\end{cases}$ 且 $g(t)=\begin{cases}\sin t, 0\le t\le\pi\\0, t<0 \text{ and } t>\pi\end{cases}$

(a) 請問 $F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt=?$ 與 $G(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}g(t)e^{-i\omega t}dt=?$ **(10%)**

(b) 若 $p(t)=g(t-\pi)$, 則 $P(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}p(t)e^{-i\omega t}dt=?$ **(5%)**

(c) 若 $q(t)=\frac{dg(t)}{dt}$, 則 $Q(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}q(t)e^{-i\omega t}dt=?$ **(5%)**

(d) $h(t)=f(t)*g(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)g(t-\tau)d\tau=?$ **(5%)**

(e) $H(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t)e^{-i\omega t}dt=?$ **(5%)**

(a) $F(\omega)=\int_0^{\pi}1\cdot e^{-i\omega t}dt=-\frac{1}{i\omega}e^{-i\omega t}\Big|_0^{\pi}=\frac{i}{\omega}(e^{-i\omega\pi}-1)$

$$G(\omega)=\int_0^{\pi}\sin t\cdot e^{-i\omega t}dt$$

$$=-\frac{1}{i\omega}\sin t\cdot e^{-i\omega t}\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{i^2\omega^2}\cos t\cdot e^{-i\omega t}\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{i^2\omega^2}\int_0^{\pi}\sin t\cdot e^{-i\omega t}dt$$

$$\Rightarrow (1-\frac{1}{\omega^2})\int_0^{\pi} \sin t \cdot e^{-i\omega t} dt = -\frac{1}{\omega^2}(e^{-i\omega\pi}+1)$$

$$\Rightarrow G(\omega) = \int_0^{\pi} \sin t \cdot e^{-i\omega t} dt = \frac{-\frac{1}{\omega^2}(e^{-i\omega\pi}+1)}{(1-\frac{1}{\omega^2})} = \frac{e^{-i\omega\pi}+1}{1-\omega^2}$$

(b) 由 time-shifting 定理:

$$P(\omega) = \mathcal{F}[p(t)] = \mathcal{F}[g(t-\pi)] = e^{-i\omega\pi}G(\omega) = \frac{e^{-2i\omega\pi}+e^{-i\omega\pi}}{1-\omega^2}$$

或者由直接作傅立葉轉換亦可得

$$P(\omega) = \int_{\pi}^{2\pi} \sin(t-\pi)e^{-i\omega t} dt$$

$$= \frac{i}{\omega}\sin(t-\pi)\cdot e^{-i\omega t}\Big|_{\pi}^{2\pi} + \frac{1}{\omega^2}\cos(t-\pi)\cdot e^{-i\omega t}\Big|_{\pi}^{2\pi}$$

$$+\frac{1}{\omega^2}\int_{\pi}^{2\pi} \sin(t-\pi)\cdot e^{-i\omega t} dt$$

$$\Rightarrow P(\omega) = \int_{\pi}^{2\pi} \sin(t-\pi)e^{-i\omega t} dt = \frac{e^{-2i\omega\pi}+e^{-i\omega\pi}}{1-\omega^2}$$

(c) 由傅立葉微分公式可知:

$$Q(\omega) = \mathcal{F}[g'(t)] = i\omega G(\omega) = \frac{i\omega(e^{-i\omega\pi}+1)}{1-\omega^2}$$

(d) $h(t) = f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$

(i) $t<0 \quad \Rightarrow h(t)=0$

(ii) $0 \le t \le \pi \quad \Rightarrow h(t) = \int_0^t \sin(t-\tau)d\tau = 1-\cos t$

(iii) $\pi \le t \le 2\pi \quad \Rightarrow h(t) = \int_{t-\pi}^{\pi} \sin(t-\tau)d\tau = 1-\cos t$

(iv) $t>2\pi \quad \Rightarrow h(t)=0$

(e)

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-i\omega t} dt = \mathcal{F}[f(t)*g(t)] = F(\omega)G(\omega)$$

$$= \frac{i}{\omega}(e^{-i\omega\pi}-1)\cdot\frac{e^{-i\omega\pi}+1}{1-\omega^2} = \frac{i(e^{-2i\omega\pi}-1)}{\omega-\omega^3} = \frac{-i(e^{-2i\omega\pi}-1)}{\omega^3-\omega}$$

或者亦可由

$$H(\omega)=\mathcal{F}[h(t)]=\int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-i\omega t}dt$$

$$=\int_{0}^{2\pi}(1-\cos t)e^{-i\omega t}dt$$

$$=\frac{1}{-i\omega}e^{-i\omega t}\Big|_0^{2\pi}-\frac{\frac{1}{-i\omega}\cos t\cdot e^{-i\omega t}\Big|_0^{2\pi}+\frac{1}{i^2\omega^2}\sin t\cdot e^{-i\omega t}\Big|_0^{2\pi}}{1-\frac{1}{\omega^2}}$$

$$=\frac{i}{\omega}(e^{-i2\pi\omega}-1)-\frac{i\omega(e^{-i2\omega\pi}-1)}{\omega^2-1}$$

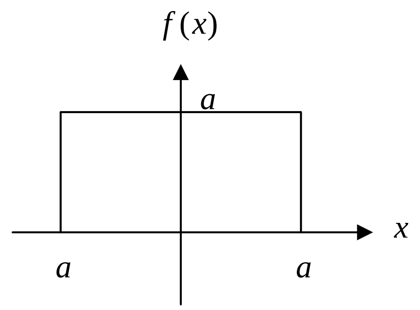
$$=\frac{i(\omega^2-1)(e^{-i2\pi\omega}-1)-i\omega^2(e^{-i2\omega\pi}-1)}{\omega^3-\omega}$$

$$=\frac{-i(e^{-i2\pi\omega}-1)}{\omega^3-\omega}$$

5. (1) 試求 $f(x)=\begin{cases}a, |x|<a\\0, |x|>a\end{cases}$ 之傅立葉轉換，其中 $a>0$ **(10%)**

(2) $\int_{-\infty}^{\infty}(\frac{\sin\omega a}{\omega a})^2 d\omega=?$ **(10%)**

(1)



由上圖可知此為偶函數

$$\therefore F(\omega)=\mathcal{F}[f(x)]=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{-i\omega x}\,dx$$

$$=\int_{-a}^{a} a\,e^{-i\omega x}\,dx$$

$$=2a\int_{0}^{a}\cos\omega x\,dx$$

$$=\frac{2a\sin\omega a}{\omega}$$

(2) 由 Parseval 恆等式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| f(x) \right|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| F(\omega) \right|^2 d\omega$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{-a} (0)^2 dx + \int_{-a}^{a} (a)^2 dx + \int_{a}^{\infty} (0)^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\frac{2a \sin a\omega}{\omega})^2 \, d\omega$$

$$\Rightarrow 2a^3 = \frac{4a^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\frac{\sin \omega a}{\omega})^2 \, d\omega$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} (\frac{\sin \omega a}{\omega})^2 \, d\omega = \pi a$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} (\frac{\sin \omega a}{\omega a})^2 \, d\omega = \frac{\pi}{a}$$