

系級：_____ 學號：_____ 姓名：_____

1. (1) 試解特徵問題： $y'' + \lambda y = 0$ ； $y'(0) = 0$ ， $y(\pi) = 0$ ，請求出特徵值與特徵函數。(10%)
 (2) 試說明何謂函數正交。(5%)
 (3) 請問(1)所得之特徵函數在區間 $[0, \pi]$ 上是否正交(須說明原因)。(5%)

2. 已知 $f(x) = x^2 + x$ 就其在區間 $(0, 2)$ 之部分，全幅展開得 $g(x)$ ，半幅正弦展開得 $G(x)$ ，半幅餘弦展開得 $F(x)$ ，試問： $g(-1)$ 、 $F(2)$ 、 $F(-1)$ 、 $G(2)$ 與 $G(-5)$ 之值。(15%)

3. 已知在 $-2 \leq x \leq 2$ 時， $f(x) = 2 - x^2$ ，試求： $f(x)$ 的傅立葉級數展開並計算 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 與 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ 之值。(15%)

4. 若 $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq \pi \\ 0, & t < 0 \text{ and } t > \pi \end{cases}$ 且 $g(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \leq t \leq \pi \\ 0, & t < 0 \text{ and } t > \pi \end{cases}$
 - (a) 請問 $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt = ?$ 與 $G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i\omega t} dt = ?$ (10%)
 - (b) 若 $p(t) = g(t - \pi)$ ，則 $P(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t)e^{-i\omega t} dt = ?$ (5%)
 - (c) 若 $q(t) = \frac{dg(t)}{dt}$ ，則 $Q(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} q(t)e^{-i\omega t} dt = ?$ (5%)
 - (d) $h(t) = f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau = ?$ (5%)
 (hint: 請將 t 分成 $t < 0$ ， $0 \leq t \leq \pi$ ， $\pi \leq t \leq 2\pi$ 與 $t > 2\pi$ 討論)
 - (e) $H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-i\omega t} dt = ?$ (5%)

5. (1) 試求 $f(x) = \begin{cases} a, & |x| < a \\ 0, & |x| > a \end{cases}$ 之傅立葉轉換，其中 $a > 0$ (10%)
 (2) $\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \omega a}{\omega a}\right)^2 d\omega = ?$ (10%)