國立臺灣海洋大學河海工程學系 2015 工程數學(二) 第一次大考參考解答

系級：______________ 學號：____________ 姓名：___________

1. 試舉出兩個為純量的物理量與兩個為向量的物理量。 (10%)

2. 給定 $\vec{v} = xz\vec{i} + (y-z)^2\vec{j} + 2xyz\vec{k}$，$\vec{w} = 2y\vec{i} + 4z\vec{j} + x^2z^2\vec{k}$，$f = 9x^2 + y^2 + 4z^2$

與 $g = xy^3z^2$ **，試求:**

(1) $\nabla f \cdot \vec{v}$ **(2)** $\nabla(\nabla \cdot \vec{w})$ **(3)** $\nabla \times (g\,\vec{j})$ **(4)** $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{v})$ **(20%)**

3. 給定 $f(x,y,z) = xy^3 - 3x^2y + z$，$\vec{v} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$

(1) 試求 f **在點** $(1,2,1)$ **最大變化率方向及最大變化率值。 (10%)**

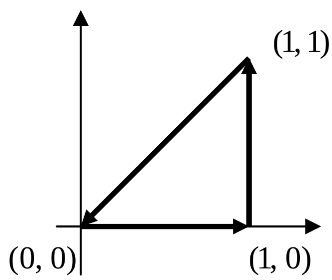
(2) 試求 f **在點** $(1,2,1)$ **往** $\vec{v}$ **的方向導數。(5%)**

4. 試求曲線 $(x-1)(y-2) = 3$ **上任一點之曲率** κ **與扭率** τ **。(10%)**

5. 試以下述兩種方法，分別計算 $\oint_C [(2x+y)dx + 2xdy] = ?$ **，路徑 *C* 如下圖所示**

(a) 直接以線積分計算。(10%)

(b) 以平面格林定理轉換成面積分計算。(10%)



6. 請參考右下圖，並回答下列各題：

其中， $v = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$，$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$，

$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$

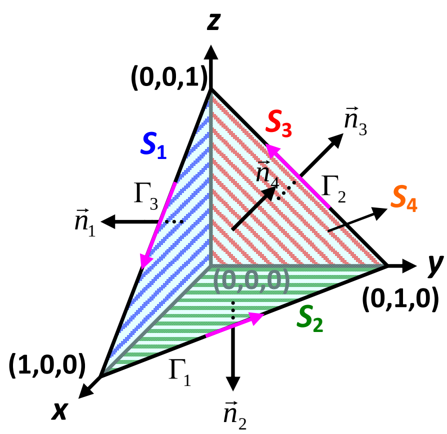
(1) $\oiint \vec{v} \cdot \vec{n}\, dS = ?$ **(以面積分計算) (5%)**

(2) $\iiint \nabla \cdot \vec{v}\, dV = ?$ **(以體積分計算) (5%)**

(3) 請使用線積分計算 $\int_\Gamma \vec{v} \cdot d\vec{r} = ?$ **(5%)**

(4) 請計算 $\iint_{S_1+S_2+S_3} (\nabla \times \vec{v}) \cdot \vec{n}\, dA = ?$ **(5%)**

(5) 請計算 $\iint_{S_4} (\nabla \times \vec{v}) \cdot \vec{n}\, dA = ?$ **(5%)**



Hint:

Gauss 散度定理： $\iiint \nabla \cdot \vec{F}\ dV = \oiint \vec{F} \cdot \vec{n}\ dA$ **(3D)**

$$\iint \nabla \cdot \vec{F}\ dA = \oint \vec{F} \cdot \vec{n}\ ds \quad \textbf{(2D)}$$

格林定理： $\int P\,dx + Q\,dy = \int (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\,dxdy$

Stokes 旋度定理： $\iint (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n}\ dA = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r}$

曲率： $\kappa = \dfrac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}$

扭率： $\tau = \left| \dfrac{d(\vec{T}(s) \times \vec{N}(s))}{ds} \right|$**)**

四面體體積： $V = \frac{1}{3} A_0 h$**，**

A_0**：底面積；**h**：高**

參考解答:

1. 純量: 溫度、壓力、質量、密度

   向量: 速度、加速度、力矩

2. (1) $\nabla f \cdot \vec{v} = (18x\vec{i} + 2y\vec{j} + 8z\vec{k}) \cdot [xz\vec{i} + (y-z)^2\vec{j} + 2xyz\vec{k}]$

$$= 18x^2z + 2y(y-z)^2 + 16xyz^2$$

   (2) $\nabla(\nabla \cdot \vec{w}) = \nabla(2x^2z) = 4xz\vec{i} + 2x^2\vec{k}$

   (3) $\nabla \times (g\vec{j}) = \nabla \times (xy^3z^2\vec{j}) = \dfrac{\partial(xy^3z^2)}{\partial x}\vec{k} - \dfrac{\partial(xy^3z^2)}{\partial z}\vec{i} = -2xy^3z\vec{i} + y^3z^2\vec{k}$

   (4) 任何旋轉場不會有發散性 (100 中興土木乙組)

   $\therefore\ \nabla \cdot (\nabla \times \vec{v}) = 0$

3. (1) $\nabla f = (\dfrac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\vec{k}) = (y^3 - 6xy)\vec{i} + (3xy^2 - 3x^2)\vec{j} + \vec{k}$

   在點 (1, 2, 1) $\Rightarrow \nabla f = -4\vec{i} + 9\vec{j} + \vec{k}$

   最大變化率值: $|\nabla f| = \sqrt{(-4)^2 + 9^2 + 1^2} = \sqrt{98}$

   最大變化率方向: $\dfrac{\nabla f}{|\nabla f|} = \dfrac{-4\vec{i} + 9\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{98}}$

   (2) 往 $\vec{v}$ 的方向導數為$\nabla f \cdot \vec{n}_v = (-4\vec{i} + 9\vec{j} + \vec{k}) \cdot \dfrac{3\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}}{\sqrt{29}} = \dfrac{2}{\sqrt{29}}$

   (101 宜大土木)

4. $(x-1)(y-2) = 3 \Rightarrow y = \dfrac{3}{(x-1)} + 2$

$$\Rightarrow y' = \frac{-3}{(x-1)^2}$$

$$\Rightarrow y'' = \frac{6}{(x-1)^3}$$

$$\kappa = \frac{|y''|}{[1 + (y')^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{\left|\dfrac{6}{(x-1)^3}\right|}{\left[1 + \dfrac{9}{(x-1)^4}\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{6\left|(x-1)^3\right|}{\left[(x-1)^4 + 9\right]^{\frac{3}{2}}}$$

因為是平面曲線，所以$\tau = 0$

5.

$$\oint_C [(2x+y)dx + 2xdy] = \int_0^1 2x\,dx + \int_0^1 2\,dy + \int_1^0 5x\,dx$$

$$= x^2\Big|_0^1 + 2y\Big|_0^1 + \frac{5}{2}x^2\Big|_1^0$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\oint_C [(2x+y)dx + 2xdy] = \iint_A [\frac{\partial(2x)}{\partial x} - \frac{\partial(2x+y)}{\partial y}]\,dxdy$$

$$= \iint_A dxdy$$

$$= A$$

$$= \frac{1}{2}$$

(102 台大應力所)

6. (1) $$\oiint \vec{v}\cdot\vec{n}\,dS = \iint_{S_1} \vec{v}\cdot\vec{n}\,dS + \iint_{S_2} \vec{v}\cdot\vec{n}\,dS + \iint_{S_3} \vec{v}\cdot\vec{n}\,dS + \iint_{S_4} \vec{v}\cdot\vec{n}\,dS$$

$$= 0 + 0 + 0 + \iint_{S_4} (x, y, z)\cdot(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})\,dS$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{S_4} (x+y+z)\,dS$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{S_4} dS = \frac{1}{\sqrt{3}} S_4$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}(\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}})$$

$$= \frac{1}{2}$$

(2) $$\iiint \nabla\cdot\vec{v}\,dV = \iiint (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})\cdot(x, y, z)\,dV$$

$$= 3\iiint dV$$

$$= 3V = 3\times(\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 1)$$

$$= \frac{1}{2}$$

(3) $$\int_\Gamma \vec{v}\cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma_1} \vec{v}\cdot d\vec{r} + \int_{\Gamma_2} \vec{v}\cdot d\vec{r} + \int_{\Gamma_3} \vec{v}\cdot d\vec{r}$$

$\Gamma_1 : x + y = 1 \quad \Rightarrow y = 1 - x \quad \Rightarrow dy = -dx$

$\Gamma_2 : y + z = 1 \quad \Rightarrow z = 1 - y \Rightarrow dz = -dy$

$\Gamma_3 : x + z = 1 \quad \Rightarrow z = 1 - x \Rightarrow dz = -dx$

$$\int_\Gamma \vec{v}\cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma_1} \vec{v}\cdot d\vec{r} + \int_{\Gamma_2} \vec{v}\cdot d\vec{r} + \int_{\Gamma_3} \vec{v}\cdot d\vec{r}$$

$$= \int_{\Gamma_1} (x, y, z)\cdot(dx, dy, 0) + \int_{\Gamma_2} (x, y, z)\cdot(0, dy, dz)$$

$$+ \int_{\Gamma_3} (x, y, z)\cdot(dx, 0, dz)$$

$$= \int_{\Gamma_1} xdx + ydy + \int_{\Gamma_2} ydy + zdz + \int_{\Gamma_3} xdx + zdz$$

$$= \int_1^0 xdx - (1-x)dx + \int_1^0 ydy - (1-y)dy + \int_0^1 xdx - (1-x)dx$$

$$= \int_1^0 (2x-1)dx + \int_1^0 (2y-1)dy + \int_0^1 (2x-1)dx$$

$$= (y^2 - y)\Big|_1^0 = 0$$

(4) 由 Stokes 旋度定理: $\iint_{S_1+S_2+S_3} (\nabla\times\vec{v})\cdot\vec{n}\, dA = -\int_\Gamma \vec{v}\cdot d\vec{r} = 0$

(5) 由 Stokes 旋度定理: $\iint_{S_4} (\nabla\times\vec{v})\cdot\vec{n}\, dA = \int_\Gamma \vec{v}\cdot d\vec{r} = 0$