國立臺灣海洋大學河海工程學系 2015 工程數學(二) 第一次大考

系級：________________　　　學號：______________　　　姓名：_____________

1. 試舉出兩個為純量的物理量與兩個為向量的物理量。 (10%)

2. 給定 $\vec{v} = xz\vec{i} + (y-z)^2\vec{j} + 2xyz\vec{k}$，$\vec{w} = 2y\vec{i} + 4z\vec{j} + x^2z^2\vec{k}$，$f = 9x^2 + y^2 + 4z^2$

與 $g = xy^3z^2$ **，試求:**

(1) $\nabla f \cdot \vec{v}$　**(2)** $\nabla(\nabla \cdot \vec{w})$　**(3)** $\nabla \times (g\,\vec{j})$　**(4)** $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{v})$　**(20%)**

3. 給定 $f(x,y,z) = xy^3 - 3x^2y + z$，$\vec{v} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$

(1) 試求 f **在點** $(1,2,1)$ **最大變化率方向及最大變化率值。 (10%)**

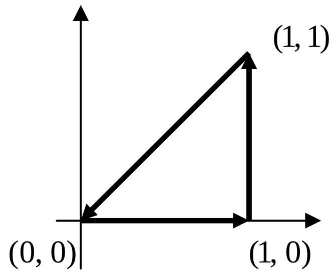
(2) 試求 f **在點** $(1,2,1)$ **往** $\vec{v}$ **的方向導數。(5%)**

4. 試求曲線 $(x-1)(y-2) = 3$ **上任一點之曲率** κ **與扭率** τ **。(10%)**

5. 試以下述兩種方法，分別計算 $\oint_C [(2x+y)dx + 2xdy] = ?$ **，路徑** ***C*** **如下圖所示**

(a) 直接以線積分計算。(10%)

(b) 以平面格林定理轉換成面積分計算。(10%)



6. 請參考右下圖，並回答下列各題：

其中， $v = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$，$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$，

$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$

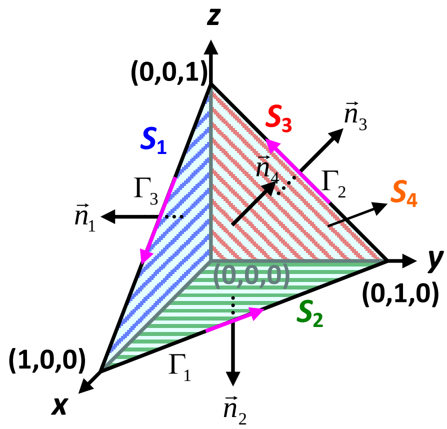
(1) $\oiint \vec{v} \cdot \vec{n}\, dS = ?$ **(以面積分計算) (5%)**

(2) $\iiint \nabla \cdot \vec{v}\, dV = ?$ **(以體積分計算) (5%)**

(3) 請使用線積分計算 $\int_\Gamma \vec{v} \cdot d\vec{r} = ?$ **(5%)**

(4) 請計算 $\iint_{S_1+S_2+S_3} (\nabla \times \vec{v}) \cdot \vec{n}\, dA = ?$ **(5%)**

(5) 請計算 $\iint_{S_4} (\nabla \times \vec{v}) \cdot \vec{n}\, dA = ?$ **(5%)**



Hint:

Gauss 散度定理： $\iiint \nabla \cdot \vec{F}\ dV = \oiint \vec{F} \cdot \vec{n}\ dA$ **(3D)**

$$\iint \nabla \cdot \vec{F}\ dA = \oint \vec{F} \cdot \vec{n}\ ds \quad \textbf{(2D)}$$

格林定理： $\int P\,dx + Q\,dy = \int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$

Stokes 旋度定理： $\iint (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n}\ dA = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r}$

曲率： $\kappa = \dfrac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}$

扭率： $\tau = \left|\dfrac{d(\vec{T}(s) \times \vec{N}(s))}{ds}\right|$

四面體體積： $V = \frac{1}{3} A_0 h$，

A_0**：底面積；**h**：高**