國立臺灣海洋大學河海工程學系 2015 工程數學(二) 2A 班期末考參考解答

系級：________　學號：________　姓名：________

1. 試填入下述時間函數 $f(t)$ 經拉普拉斯轉換後所對應之 $F(s)$ (30%)

$f(t)$	$p_1(t)$	$p_2(t)$	$p_3(t)$	$p_4(t)$	$p_5(t)$	$p_6(t)$	$p_7(t)$	$p_8(t)$	$p_9(t)$	$p_{10}(t)$
$F(s)$										

時間函數 $f(t)$

$p_1(t)=1$， $p_2(t)=\sin t$， $p_3(t)=\cos t$， $p_4(t)=t\sin t$， $p_5(t)=t\cos t$

$p_6(t)=e^t$， $p_7(t)=\sinh t$， $p_8(t)=\cosh t$， $p_9(t)=t\sinh t$， $p_{10}(t)=t\cosh t$

(hint: $\sinh t=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}$, $\cosh t=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}$)

s 函數 $F(s)$

(1) 1	**(2)** $\dfrac{1}{s}$	**(3)** $\dfrac{1}{s^2}$
(4) $\dfrac{1}{s-1}$	**(5)** $\dfrac{s}{s^2+1}$	**(6)** $\dfrac{s}{s^2-1}$
(7) $\dfrac{1}{s+1}$	**(8)** $\dfrac{1}{s^2+1}$	**(9)** $\dfrac{1}{s^2-1}$
(10) $\dfrac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$	**(11)** $\dfrac{2s}{(s^2+1)^2}$	**(12)** $\dfrac{s}{(s^2+1)^2}$
(13) $\dfrac{s^2+1}{(s^2-1)^2}$	**(14)** $\dfrac{2s}{(s^2-1)^2}$	**(15)** $\dfrac{s}{(s^2-1)^2}$

2. 試求下列 $F(s)$ 的拉氏逆轉換。 (20%)

(1) $F(s)=\dfrac{1}{(s-3)(s+5)}$

(2) $F(s)=\dfrac{se^{-s}}{s^2+4}$

(3) $F(s)=\dfrac{1}{s^2+2s+2}$

(4) $F(s)=\dfrac{s^2}{s^2+9}$

3. 已知 $\mathcal{L}[f(t)]=F(s)$, $\mathcal{L}[g(t)]=G(s)$ 且 $h(t)$ 為 $f(t)$ 與 $g(t)$ 的摺積 **(Convolution)** 即 $h(t)=f(t)*g(t)=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau$ ，由 $h(t)$ 拉普拉斯轉換可得 $\mathcal{L}[h(t)]=H(s)=F(s)G(s)$，若已知 $H(s)=\dfrac{1}{(s^2+a^2)^2}$，試求 $h(t)=?$ **(10%)**

4. 試以拉普拉斯轉換求解下述微分方程。 **(20%)**

(1) $y''+2y'+y=e^{-t}$ 且初始條件為 $y(0)=-1$ 與 $y'(0)=1$

(2) $y''+4y=\delta(t)$ 且初始條件為 $y(0)=1$ 與 $y'(0)=0$

5. 試以拉普拉斯轉換求解下述聯立微分方程。 **(20%)**

$\begin{cases} y_1'=4y_2-8\cos 4t \\ y_2'=-3y_1-9\sin 4t \end{cases}$ 且初始條件為 $y_1(0)=0$ 與 $y_2(0)=3$

參考解答：

1. 試填入下述時間函數 $f(t)$ 經拉普拉斯轉換後所對應之 $F(s)$ (20%)

$f(t)$	$p_1(t)$	$p_2(t)$	$p_3(t)$	$p_4(t)$	$p_5(t)$	$p_6(t)$	$p_7(t)$	$p_8(t)$	$p_9(t)$	$p_{10}(t)$
$F(s)$	**(2)**	**(8)**	**(5)**	**(11)**	**(10)**	**(4)**	**(9)**	**(6)**	**(14)**	**(13)**

時間函數 $f(t)$

$p_1(t)=1$， $p_2(t)=\sin t$， $p_3(t)=\cos t$， $p_4(t)=t\sin t$， $p_5(t)=t\cos t$

$p_6(t)=e^t$， $p_7(t)=\sinh t$， $p_8(t)=\cosh t$， $p_9(t)=t\sinh t$， $p_{10}(t)=t\cosh t$

(hint: $\sinh t=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}$， $\cosh t=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}$)

s 函數 $F(s)$

(1) 1	**(2)** $\dfrac{1}{s}$	**(3)** $\dfrac{1}{s^2}$
(4) $\dfrac{1}{s-1}$	**(5)** $\dfrac{s}{s^2+1}$	**(6)** $\dfrac{s}{s^2-1}$
(7) $\dfrac{1}{s+1}$	**(8)** $\dfrac{1}{s^2+1}$	**(9)** $\dfrac{1}{s^2-1}$
(10) $\dfrac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$	**(11)** $\dfrac{2s}{(s^2+1)^2}$	**(12)** $\dfrac{s}{(s^2+1)^2}$
(13) $\dfrac{s^2+1}{(s^2-1)^2}$	**(14)** $\dfrac{2s}{(s^2-1)^2}$	**(15)** $\dfrac{s}{(s^2-1)^2}$

2. 試求下列$F(s)$的拉氏逆轉換 $f(t)$。 (20%)

(1) $F(s)=\dfrac{1}{(s-3)(s+5)}$

(2) $F(s)=\dfrac{se^{-s}}{s^2+4}$

(3) $F(s)=\dfrac{1}{s^2+2s+2}$

(4) $F(s)=\dfrac{s^2}{s^2+9}$

(1) $F(s)=\dfrac{1}{(s-3)(s+5)}=\dfrac{1}{8}(\dfrac{1}{s-3}-\dfrac{1}{s+5})$

$$\Rightarrow f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{8}(\frac{1}{s-3}-\frac{1}{s+5})]=\frac{1}{8}(e^{3t}-e^{-5t})$$

(2) $f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\mathcal{L}^{-1}[e^{-s}\cdot\dfrac{s}{s^2+4}]=u(t-1)\cos(2(t-1))$

(3) $F(s)=\frac{1}{s^2+2s+2}=\frac{1}{(s^2+2s+1)+1}=\frac{1}{(s+1)^2+1}$

又 $\mathcal{L}^{-1}[\sin t]=\frac{1}{s^2+1}$

$\therefore\ f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{(s+1)^2+1}]=e^{-t}\sin t$

(4) $F(s)=\frac{s^2}{s^2+9}=\frac{s^2+9-9}{s^2+9}=1-3\cdot\frac{3}{s^2+9}$

$\Rightarrow f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\mathcal{L}^{-1}[1-3\cdot\frac{3}{s^2+9}]=\delta(t)-3\sin 3t$

3. 已知 $\mathcal{L}[f(t)]=F(s)$, $\mathcal{L}[g(t)]=G(s)$ 且 $h(t)$ 為 $f(t)$ 與 $g(t)$ 的摺積 **(Convolution)** 即 $h(t)=f(t)*g(t)=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau$ ，由 $h(t)$ 拉普拉斯轉換可得 $\mathcal{L}[h(t)]=H(s)=F(s)G(s)$，若已知 $H(s)=\frac{1}{(s^2+a^2)^2}$，試求 $h(t)=?$

$H(s)=\frac{1}{s^2+a^2}\cdot\frac{1}{s^2+a^2}$

$\therefore$ 令 $F(s)=G(s)=\frac{1}{s^2+a^2}$

$\Rightarrow f(t)=g(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s^2+a^2}]=\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{a}\frac{a}{s^2+a^2}]=\frac{1}{a}\sin at$

$$
\begin{aligned}
h(t)&=f(t)*g(t)\\
&=\int_0^t \frac{1}{a}\sin a\tau\cdot\frac{1}{a}\sin a(t-\tau)\,d\tau\\
&=\frac{1}{a^2}\int_0^t \sin a\tau\cdot(\sin at\cos a\tau-\cos at\sin a\tau)\,d\tau\\
&=\frac{1}{a^2}\int_0^t (\frac{1}{2}\sin at\sin 2a\tau-\cos at\sin^2 a\tau)\,d\tau\\
&=\frac{1}{a^2}\int_0^t [\frac{1}{2}\sin at\sin 2a\tau-\frac{1}{2}\cos at(1-\cos 2a\tau)]\,d\tau\\
&=\frac{1}{2a^2}[-\frac{1}{2a}\sin at\cos 2a\tau-\cos at(\tau-\frac{1}{2a}\sin 2a\tau)]\Big|_0^t\\
&=\frac{1}{2a^2}[-\frac{1}{2a}\sin at\cos 2at+\frac{1}{2a}\sin at-\cos at(t-\frac{1}{2a}\sin 2at)]\\
&=\frac{1}{2a^2}(\frac{1}{a}\sin at-t\cos at)\\
&=\frac{\sin at-at\cos at}{2a^3}
\end{aligned}
$$

4. 試以拉普拉斯轉換求解下述微分方程。 (20%)

(1) $y'' + 2y' + y = e^{-t}$ 且初始條件為 $y(0) = -1$ 與 $y'(0) = 1$

(2) $y'' + 4y = \delta(t)$ 且初始條件為 $y(0) = 1$ 與 $y'(0) = 0$

(1) $\mathcal{L}[y'' + 2y' + y] = \mathcal{L}[e^{-t}]$

$$\Rightarrow [s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)] + 2[sY(s) - y(0)] + Y(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$\Rightarrow (s^2 + 2s + 1)Y(s) = -(s+1) + \frac{1}{s+1}$$

$$\Rightarrow Y(s) = -\frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^3}$$

$$\therefore \quad y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}[-\frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^3}] = -e^{-t} + \frac{1}{2}t^2 e^{-t}$$

(2) $\mathcal{L}[y'' + 4y] = \mathcal{L}[\delta(t)]$

$$\Rightarrow [s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)] + 4Y(s) = 1$$

$$\Rightarrow (s^2 + 4)Y(s) = s + 1$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{s}{s^2+4} + \frac{1}{s^2+4}$$

$$\therefore \quad y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}[\frac{s}{s^2+4} + \frac{1}{s^2+4}] = \cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t$$

5. 試以拉普拉斯轉換求解下述聯立微分方程。(20%) (100 交大土木)

$$\begin{cases} y_1' = 4y_2 - 8\cos 4t \\ y_2' = -3y_1 - 9\sin 4t \end{cases} \text{ 且 } y_1(0) = 0, \ y_2(0) = 3$$

$$\begin{cases} y_1' = 4y_2 - 8\cos 4t \\ y_2' = -3y_1 - 9\sin 4t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathcal{L}[y_1'] = \mathcal{L}[4y_2 - 8\cos 4t] \\ \mathcal{L}[y_2'] = \mathcal{L}[-3y_1 - 9\sin 4t] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} sY_1 - y_1(0) = 4Y_2 - \dfrac{8s}{s^2+16} \\ sY_2 - y_2(0) = -3Y_1 - \dfrac{36}{s^2+16} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} sY_1 = 4Y_2 - 8\cdot\dfrac{s}{s^2+16} \\ sY_2 - 3 = -3Y_1 - 9\cdot\dfrac{4}{s^2+16} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} sY_1 - 4Y_2 = -\dfrac{8s}{s^2+16} & \cdots\cdots (1) \\ 3Y_1 + sY_2 = \dfrac{3s^2+12}{s^2+16} & \cdots\cdots (2) \end{cases}$$

由 $(1)\times s + (2)\times 4$ 可得

$$(s^2+12)Y_1 = -\frac{8s^2}{s^2+16} + 4\cdot\frac{3s^2+12}{s^2+16} = \frac{4s^2+48}{s^2+16} \qquad \Rightarrow Y_1 = \frac{4}{s^2+16}$$

帶入 (1) 可得 $Y_2 = \dfrac{3s}{s^2+16}$

$\therefore \quad y_1(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y_1] = \sin 4t$

$\quad\;\; y_2(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y_2] = 3\cos 4t$