

系級：_____ 學號：_____ 姓名：_____

1.
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{Bmatrix}, \text{ 請解出 } \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = ?$$

2. 對如下矩陣 A 與向量 b 試解方程組 $Ax=b$ 。另有矩陣 B 如下，試問其列梯矩陣。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \& \quad b = \begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{Bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

3. 已知在 R^3 之映射 $T(x) = [2x_1 + x_2 \quad x_2 - x_3 \quad 2x_2 + 4x_3]^T$ 試求 T 之特徵值與特徵向量。

4. 試問以下矩陣 A 、 B 之特徵值與特徵向量。

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

5. 對於如下矩陣 A ，已知 $t(A)=6$ 與 $\det(A)=-30$ ，試問 A 之特徵值。

$$A = \begin{bmatrix} a & -2.6 & b \\ c & d & 1.7 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

參考解答:

$$1. x = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{Bmatrix} t + \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$2. x = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{Bmatrix} + s \begin{Bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + t \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 7 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{列梯矩陣})$$

3. 特徵值 $\lambda = 3, 2, 2$

$$\lambda_1 = 3 \Rightarrow x^1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{Bmatrix}, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 2 \Rightarrow x^2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{只有一個})$$

4. A 之特徵值 $\lambda = -1, -1, 1, 1$

A 之特徵向量:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1 \Rightarrow x^1, x^2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \lambda_3 = \lambda_4 = 1 \Rightarrow x^3, x^4 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

B 之特徵值 $\lambda = -1, -5, 3, 3$

B 之特徵向量:

$$\lambda_1 = -1 \Rightarrow x^1 = \begin{Bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \lambda_2 = -5 \Rightarrow x^2 = \begin{Bmatrix} -11 \\ 1 \\ 5 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \lambda_3 = \lambda_4 = 3 \Rightarrow x^3 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

5. $\lambda = 3, -2, 5$