

系級：_____ 學號：_____ 姓名：_____

1. 試解 $\frac{dy(x)}{dx} = \frac{px + qy}{rx + sy}$ 在什麼條件或判別式下 (p, q, r, s 之關係)，此 ODE 會正合(exact)? (5%) 此時 $\phi(x, y) = ?$ (5%)

2. 給一微分方程式 $x^2 y' = y^2 + 2xy$
 - (1) 此微分方程式為線性或非線性? (5%) 正合(exact)或非正合? (5%)
 - (2) 試以分離變數法求解。 (Hint: 須先變數變換) (8%)
 - (3) 試以正合法解之。(若正合，直接求解 $\phi(x, y)$; 若非正合，先求出積分因子，再求解 $\phi(x, y)$) (8%)
 - (4) 試以 Bernoulli 法解之。 (8%)
 - (5) 試以全微分法解之。 (8%)

3. 給一 Clairauts 方程式 $y = xy' + y'^2$ ，試求此微分方程的通解(general solution) 與奇解(singular solution)。 (10%)

4. 試解:
 - (1) $y' + \frac{1}{x}y = \cos x$ (7%)
 - (2) $x \frac{dy}{dx} + y = x^2 y^2$ (7%)
 - (3) $y' = \frac{xy^2 - 1}{1 - x^2 y}$, $y(0) = 1$ (7%)
 - (4) $3x^2 ye^y dx + x^3 e^y (y+1) dy = 0$ (7%)

5. $y(t)$ 為微分方程 $(e^{\cos y} - t \cdot \sin y) \frac{dy}{dt} = 1$ 的解，且滿足初始條件 $y(0) = 0$ ，試求 $y(t) = ?$ ($y(t)$ 的解可以是隱函數型式) (10%)