國立臺灣海洋大學河海工程學系 2014 工程數學(一) 期末考參考解答

系級：________ 學號：________ 姓名：________

1. $A=\begin{bmatrix}3 & -1 & 1 & 2 & 6 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 6 & 7 & 3\\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 9\\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$ **之行列式值。(10%)**

2. 已知 $A=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$**，**$B^{-1}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}-4 & 0\\ 4 & 1\end{bmatrix}$**，試求** $(AB)^{-1}$**。 (10%)　　(100 中山機電)**

3. 給定一矩陣 $A=\begin{bmatrix}2 & -2 & 3\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & -1\end{bmatrix}$

(a)由矩陣基本定理可知，任何方陣必可被分解為一對稱矩陣 *B* 與一反對稱矩陣 *C*，試求 *B* 與 *C* 分別為何? (10%)

(b)已知 $A^{-1}=pI+qA+rA^2$ **，試求係數** p**，**q**，**r **。 (10%)　　(101 成大土木)**

(c) A^{-1} **之特徵值為何? (10%)**

4. 矩陣 $A=\begin{bmatrix}a & -6 & b\\ 0 & 2 & 0\\ 4 & c & d\end{bmatrix}$**，已知** $trace(A)=1$ **與** $\det(A)=-40$**，試問 *A* 之特徵值。**

(10%)

5. 試以 Gram-Schmidt 法將向量集$\{x^1, x^2, x^3\}$**，**$x^1=[1\ \ 1\ \ 0]^T$**，**$x^2=[2\ \ 0\ \ 1]^T$**，**
$x^3=[2\ \ 2\ \ 1]^T$ **正交單位化。 (10%)**

6. 試將 $A=\begin{bmatrix}7 & 4 & 4\\ -6 & -4 & -7\\ -2 & -1 & 2\end{bmatrix}$**化為喬登正則式(**$PJP^{-1}$**)。(10%)**

7. 已知 $A^3=\begin{bmatrix}5 & 6\\ 3 & 2\end{bmatrix}$**，試求矩陣** A **的特徵值與所對應的特徵向量，並計算** A^5 **。**

(10%)

8. 試解: $\frac{dx}{dt}=Ax+z$ **其中** $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix},\ z=\begin{Bmatrix}2e^{4t}\\ e^{4t}\end{Bmatrix}$ **。(10%)**

參考解答:

1. $A=\begin{bmatrix}3&-1&1&2&6&1\\1&1&-1&6&7&3\\0&0&2&1&3&9\\0&0&0&2&-1&-1\\0&0&0&0&1&1\\0&0&0&0&-1&1\end{bmatrix}$ **之行列式值。(10%)**

$$\det(A)=\left|\begin{array}{ccc:ccc}3&-1&1&2&6&1\\1&1&-1&6&7&3\\0&0&2&1&3&9\\ \hdashline 0&0&0&2&-1&-1\\0&0&0&0&1&1\\0&0&0&0&-1&1\end{array}\right|=\begin{vmatrix}3&-1&1\\1&1&-1\\0&0&2\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}2&-1&-1\\0&1&1\\0&-1&1\end{vmatrix}=8\cdot4=32$$

2. 已知 $A=\begin{bmatrix}-1&2\\2&1\end{bmatrix}$**，**$B^{-1}=\dfrac{1}{4}\begin{bmatrix}-4&0\\4&1\end{bmatrix}$**，試求**$(AB)^{-1}$**。 (10%)**

$$A=\begin{bmatrix}-1&2\\2&1\end{bmatrix}\quad\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}-1&2\\2&1\end{bmatrix}$$

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}=\frac{1}{20}\begin{bmatrix}-4&0\\4&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&2\\2&1\end{bmatrix}=\frac{1}{20}\begin{bmatrix}4&-8\\-2&9\end{bmatrix}$$

3. 給定一矩陣 $A=\begin{bmatrix}2&-2&3\\1&1&1\\1&3&-1\end{bmatrix}$

(a)由矩陣基本定理可知，任何方陣必可被分解為一對稱矩陣 *B* 與一反對稱矩陣 *C*，試求 *B* 與 *C* 分別為何? (10%)

(b)已知 $A^{-1}=pI+qA+rA^2$**，試求係數** p**，**q**，**r**。 (10%) (101 成大土木)**

(c) A^{-1} **之特徵值為何? (10%)**

(a) $$B=\frac{1}{2}(A+A^T)=\frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}2&-2&3\\1&1&1\\1&3&-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&1&1\\-2&1&3\\3&1&-1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2&-0.5&2\\-0.5&1&2\\2&2&-1\end{bmatrix}$$

$$C=\frac{1}{2}(A-A^T)=\frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}2&-2&3\\1&1&1\\1&3&-1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2&1&1\\-2&1&3\\3&1&-1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0&-1.5&1\\1.5&0&-1\\-1&1&0\end{bmatrix}$$

(b) $|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}2-\lambda & -2 & 3\\ 1 & 1-\lambda & 1\\ 1 & 3 & -1-\lambda\end{vmatrix}=0 \quad \Rightarrow \lambda^3-2\lambda^2-5\lambda+6=0$

由 Cayley-Hamilton 定理可知: $A^3-2A^2-5A+6I=0$

同乘 A^{-1} 可得 $A^2-2A-5I+6A^{-1}=0$

$$\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{6}(5I+2A-A^2)$$

$\therefore\ p=\frac{5}{6},\ q=\frac{1}{3},\ r=-\frac{1}{6}$

(c) 由特徵方程 $\lambda^3-2\lambda^2-5\lambda+6=0$ 可得矩陣特徵值為 1, 3, -2

所以 A^{-1} 的特徵值為 1, $\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{2}$

4. 矩陣 $A=\begin{bmatrix}a & -6 & b\\ 0 & 2 & 0\\ 4 & c & d\end{bmatrix}$**，已知** $trace(A)=1$ **與** $\det(A)=-40$**，試問 *A* 之特徵值。**

(10%)

$\therefore\ |A-\lambda I|=\begin{vmatrix}a-\lambda & -6 & b\\ 0 & 2-\lambda & 0\\ 4 & c & d-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)\begin{vmatrix}a-\lambda & b\\ 4 & d-\lambda\end{vmatrix}=0$

可知有一特徵值為 $\lambda_1=2$

由 $trace(A)=1 \Rightarrow \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1 \Rightarrow \lambda_2+\lambda_3=-1$

$\det(A)=-40 \Rightarrow \lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3=-40 \Rightarrow \lambda_2\cdot\lambda_3=-20$

$\therefore \lambda_2\cdot(-1-\lambda_2)=-20 \quad \Rightarrow \lambda_2^2+\lambda_2-20=0$

$\Rightarrow (\lambda_2+5)(\lambda_2-4)=0$

$\Rightarrow \lambda_2=4 \text{ or } -5$

當 $\lambda_2=4 \quad \Rightarrow \lambda_3=-5$

當 $\lambda_2=-5 \quad \Rightarrow \lambda_3=4$

故可得三個特徵值為 2, 4, -5

5. 試以 Gram-Schmidt 法將向量集$\{x^1, x^2, x^3\}$**,** $x^1=[1\ \ 1\ \ 0]^T$**,** $x^2=[2\ \ 0\ \ 1]^T$**,** $x^3=[2\ \ 2\ \ 1]^T$ **正交單位化。 (10%)**

$x^1=[1\ \ 1\ \ 0]^T \quad \Rightarrow u^1=\frac{x^1}{\|x^1\|}=[\frac{1}{\sqrt{2}}\ \ \frac{1}{\sqrt{2}}\ \ 0]^T$

$b^2=x^2-<x^2,u^1>u^1=[1\ \ -1\ \ 1]^T$

$$\Rightarrow u^2 = \frac{b^2}{\|b^2\|} = [\frac{1}{\sqrt{3}} \ \ -\frac{1}{\sqrt{3}} \ \ \frac{1}{\sqrt{3}}]^T$$

$$b^3 = x^3 - <x^3, u^1> u^1 - <x^3, u^2> u^2 = [-\frac{1}{3} \ \ \frac{1}{3} \ \ \frac{2}{3}]^T$$

$$\Rightarrow u^3 = \frac{b^3}{\|b^3\|} = [-\frac{1}{\sqrt{6}} \ \ \frac{1}{\sqrt{6}} \ \ \frac{2}{\sqrt{6}}]^T$$

6. 試將 $A = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 4 \\ -6 & -4 & -7 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ **化為喬登正則式(**PJP^{-1}**)。 (10%)**

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 7-\lambda & 4 & 4 \\ -6 & -4-\lambda & -7 \\ -2 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+1)(\lambda-3)^2 = 0$$

$\therefore \lambda = -1, 3, 3$

當 $\lambda_1 = -1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 8 & 4 & 4 \\ -6 & -3 & -7 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

$\Rightarrow x^1 = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{Bmatrix} t$ (取最簡單之向量，令 $t = 1$)

當 $\lambda_2 = \lambda_3 = 3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ -6 & -7 & -7 \\ -2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

$\Rightarrow x^2 = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix} t$ (取最簡單之向量，令 $t = 1$)

$\therefore$ 少一個向量 x^3，故矩陣無法對角化

由 Jordan 正則化法可求得廣義特徵向量 x^3

$Ax^3 = \lambda_3 x^3 + x^2 \quad \Rightarrow (A - \lambda_3 I) x^3 = x^2$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ -6 & -7 & -7 \\ -2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix} t + \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$ 故取廣義特徵向量 $x^3 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix}$

$$\therefore P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \ J = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \ P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = PJP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

7. 已知 $A^3 = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$**，試求矩陣** A **的特徵值與所對應的特徵向量，並計算** A^5 **。(10%)**

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 6 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \lambda^2 - 7\lambda - 8 = 0 \quad \Rightarrow \lambda = -1, 8$$

故矩陣 A 的特徵值為-1 與 2

所對應的特徵向量為分別為 $(1,-1)^T$ 與 $(2,1)^T$

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \ S^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$A^5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-1)^5 & 0 \\ 0 & 2^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 21 & 22 \\ 11 & 10 \end{bmatrix}$$

8. 試解: $\dfrac{dx}{dt} = Ax + z$ **其中** $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \ z = \begin{Bmatrix} 2e^{4t} \\ e^{4t} \end{Bmatrix}$ 。 **(10%)**

$$\det(A - \lambda I) = 0 \ \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \ \Rightarrow \lambda = -1 \text{ or } 3$$

當 $\lambda = -1 \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow x^1 = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$

當 $\lambda = 3 \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow x^2 = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$

$$\therefore \quad A = SDS^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

令 $x = Sy \quad \Rightarrow S\dfrac{dy}{dt} = ASy + z \quad \Rightarrow \dfrac{dy}{dt} = S^{-1}ASy + S^{-1}z$

$$\therefore \quad \begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 2e^{4t} \\ e^{4t} \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{y}_1 = -y_1 + \dfrac{1}{2}e^{4t} \\ \dot{y}_2 = 3y_2 + \dfrac{3}{2}e^{4t} \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} y_1 = c_1 e^{-t} + \dfrac{1}{10}e^{4t} \\ y_2 = c_2 e^{3t} + \dfrac{3}{2}e^{4t} \end{cases}$$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_1 + y_2 \\ -y_1 + y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t} + \dfrac{8}{5}e^{4t} \\ -c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t} + \dfrac{7}{5}e^{4t} \end{Bmatrix}$$