

系級：\_\_\_\_\_ 學號：\_\_\_\_\_ 姓名：\_\_\_\_\_

1.  $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 2 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 6 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$  之行列式值。(10%)

2. 已知  $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $B^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ , 試求  $(AB)^{-1}$ 。(10%)

3. 給定一矩陣  $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

(a) 由矩陣基本定理可知，任何方陣必可被分解為一對稱矩陣  $B$  與一反對稱矩陣  $C$ ，試求  $B$  與  $C$  分別為何？(10%)

(b) 已知  $A^{-1} = pI + qA + rA^2$ ，試求係數  $p, q, r$ 。(10%)

(c)  $A^{-1}$  之特徵值為何？(10%)

4. 矩陣  $A = \begin{bmatrix} a & -6 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & c & d \end{bmatrix}$ ，已知  $\text{trace}(A) = 1$  與  $\det(A) = -40$ ，試問  $A$  之特徵值。

(10%)

5. 試以 Gram-Schmidt 法將向量集  $\{x^1, x^2, x^3\}$ ,  $x^1 = [1 \ 1 \ 0]^T$ ,  $x^2 = [2 \ 0 \ 1]^T$ ,  $x^3 = [2 \ 2 \ 1]^T$  正交單位化。(10%)

6. 試將  $A = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 4 \\ -6 & -4 & -7 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$  化為喬登正則式  $(PJP^{-1})$ 。(10%)

7. 已知  $A^3 = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ ，試求矩陣  $A$  的特徵值與所對應的特徵向量，並計算  $A^5$ 。

(10%)

8. 試解： $\frac{dx}{dt} = Ax + z$  其中  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $z = \begin{Bmatrix} 2e^{4t} \\ e^{4t} \end{Bmatrix}$ 。(10%)